高中数学竞赛专题讲座

丛书策划 李胜宏
丛书主编 陶平生 苏建一
刘康宁 边红平

BUDENGSHI

不等式

本书主编 李世杰

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座. 不等式/陶平生等主编. —杭州：浙江大学出版社，2007.7
ISBN 978-7-308-05238-2

Ⅰ. 高… Ⅱ. 陶… Ⅲ. 代数课—高中—教学参考资料
Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 039718 号

责任编辑 杨晓鸣 冯慈璜(特邀)
出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com)
经 销 浙江省新华书店
排 版 杭州大漠照排印刷有限公司
印 刷 浙江省良渚印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 15.75
字 数 310 千字
版 印 次 2007 年 7 月第 1 版 2007 年 7 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-05238-2
定 价 18.00 元

丛书编委会

编 写 说 明

影响最大、级别最高的中学生"国际数学奥林匹克"(简称 IMO)由来已久,自第1届 IMO 于1959年在罗马尼亚举行以来,有近60年的历史,其影响越来越广泛。在国际数学奥林匹克的推动下,世界各地的数学竞赛活动如火如荼。目前,我国数学竞赛逐步形成了从全国联合竞赛、全国中学生数学冬令营到国家集训队一个完整的竞赛选拔体系。

数学竞赛作为一项智力活动,吸引了无数数学爱好者积极参与,也为那些对数学有深厚兴趣和天赋的学生提供一个展示自我的平台,是发现和培养数学人才的一条有效渠道。我们欣喜地看到,通过这项活动,发现了一批数学苗子,培养了一批数学人才。许多参与竞赛的优秀选手后来都成了杰出的数学家。

总体看来,我国的数学竞赛体制日趋完善,它的一些功能和作用也日益凸显。随着高校招生制度的改革,各种学科竞赛,尤其是数学竞赛的选拔功能越来越被广大高校所认可。事实上,学科竞赛已经成为高校自主招生和选拔人才的重要途径之一。

我们本着为数学竞赛的普及、提高做点有益事情的愿望,在全国范围内组织一批长期从事数学竞赛且做出杰出成绩的一线专家编写了一套"高中数学竞赛专题讲座"丛书。丛书包括《初等数论》、《函数与函数方程》、《复数与多项式》、《不等式》、《组合问题》、《排列组合与概率》、《数列与归纳法》、《集合与简易逻辑》、《三角函数》、《立体几何》、《平面几何》、《解析几何》和《数学结构思想及解题方法》13种。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大

纲要求的一些基本数学思想、方法，凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是：

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题，通过对典型例题的解剖，传授数学思想方法，侧重培养学生的逻辑思维能力，不唯解题而解题；

2. 本着少而精的原则选择材料，不搞题海战术，不追求大而全，而是以点带面，举一反三；

3. 以数学修养和能力培养为立意，通过深刻剖析问题的数学背景，挖掘数学内涵，培养学生的数学品格和解决实际问题的能力；

4. 在注意基础知识训练同时，有适当程度的拔高，对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有一定的指导作用和参考价值。

丛书由浙江大学数学系教授、博士生导师、全国数学奥林匹克竞赛领队李胜宏策划；丛书由陶平生、苏建一、刘康宁、边红平主编；参加编写的成员是：陶平生、苏建一、刘康宁、边红平、黄军华、王建中、岑爱国、韦吉珠、张雷、王俊明、李世杰、沈虎跃、斯理炯、虞金龙、马洪炎。

鉴于我们的水平有限，书中的不妥之处敬请读者批评指正。

目 录

第1讲 不等式的性质

知识点金

1. 三分律：任意两个实数 a 和 b，都有确定的序关系，即 $a>b$；$a=b$；$a<b$. 三者中有且仅有一个成立.

2. 不等式的性质

对称性：$a>b \Leftrightarrow b<a$；

传递性：$a>b，b>c \Rightarrow a>c$；

可加性：$a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$；

可乘性：$a>b，c>0 \Rightarrow ac>bc$，

$a>b，c<0 \Rightarrow ac<bc$；

加法法则：$a>b，c>d \Rightarrow a+c>b+d$；

乘法法则：$a>b>0，c>d>0 \Rightarrow ac>bd$；

乘方法则：$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$（$n\in \mathbf{Z}$，且 $n>1$）；

开方法则：$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\in \mathbf{Z}$，且 $n>1$）；

倒数法则：$a>b，ab>0 \Rightarrow \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

3. 比较两数大小的基本方法为求差与求商.

$a-b>0 \Leftrightarrow a>b$；$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$；

$a>0，b>0$，且 $\dfrac{a}{b}>1 \Rightarrow a>b$；$a<0，b<0$，且 $\dfrac{a}{b}>1 \Rightarrow a<b$.

这是比较两个实数大小的主要依据.

例题精析

例 1 （第 11 届“希望杯”试题）已知 $0<a<b$，$x=\sqrt{a+b}-\sqrt{b}$，$y=\sqrt{b}-\sqrt{b-a}$，则 x，y 的大小关系是________.

解法 1 $x=\sqrt{a+b}-\sqrt{b}=\dfrac{a}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b}}$，$y=\sqrt{b}-\sqrt{b-a}=\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{b-a}}$.

因为 $0<a<b$，所以 $\sqrt{a+b}+\sqrt{b}>\sqrt{b}+\sqrt{b-a}$，

所以 $x<y$.

解法 2 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{b-a}}=\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{b-a}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b}}$.

因为 $a+b>b-a$，所以 $\dfrac{x}{y}<1$，

所以 $x<y$.

解法 3 原问题等价于比较 $\sqrt{a+b}+\sqrt{b-a}$ 与 $2\sqrt{b}$ 的大小. 因为 $\sqrt{a+b}+\sqrt{b-a}=\sqrt{(a+b)+2\sqrt{b^2-a^2}+(b-a)}=\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-a^2}}<\sqrt{2b+2\sqrt{b^2}}=2\sqrt{b}$，所以 $x<y$.

解法 4 如图 1－1，在函数 $y=\sqrt{x}$ 的图象上取三个不同的点 $A(b-a,\ \sqrt{b-a})$、$B(b,\ \sqrt{b})$、$C(a+b,\ \sqrt{a+b})$，由图象，显然有 $k_{BC}<k_{AB}$，

即 $\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{b}}{(a+b)-b}<\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{b-a}}{b-(b-a)}$，

即 $\sqrt{a+b}-\sqrt{b}<\sqrt{b}-\sqrt{b-a}$，

亦即 $x<y$.

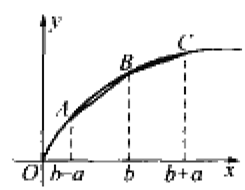


图 1－1

例 2 若 $a>0$，且 $a\neq 1$，$p=\log_a(a^3+a+1)$，$q=\log_a(a^2+a+1)$，则 p、q 的大小关系为 （　　）

A. $p=q$　　B. $p<q$

C. $p>q$　　D. $a>1$ 时，$p>q$；$0<a<1$ 时，$p<q$

解 欲比较 p、q 的大小，只需先比较 a^3+a+1 与 a^2+a+1 的大小，再利用对数函数的单调性. 而决定 a^3+a+1 与 a^2+a+1 的大小的 a 值的分界点，是使 $(a^3+a+1)-(a^2+a+1)=a^2(a-1)=0$ 的 a 值：$a=1$.

当 $a>1$ 时，$a^3+a+1>a^2+a+1$，此时 $\log_a(a^3+a+1)>\log_a(a^2+a+1)$，即 $p>q$.

当 $0<a<1$ 时，$a^3+a+1<a^2+a+1$，此时 $\log_a(a^3+a+1)>\log_a(a^2+a+1)$，即 $p>q$.

可见，不论 $a>1$ 还是 $0<a<1$，都有 $p>q$. 故选 C.

例 3　求函数 $y=\sin x+\dfrac{2}{\sin x}(0<x<\pi)$ 的最小值.

分析猜想当：$\sin x=1$ 时，函数取到最小值 $y=3$，于是问题转化为当 $0<x<\pi$ 时，不等式 $\sin x+\dfrac{2}{\sin x}\geqslant 3$ 恒成立且等号能取到.

解　由于 $0<\sin x\leqslant 1$，$\sin x+\dfrac{2}{\sin x}\geqslant 3\Leftrightarrow \sin^2 x-3\sin x+2\geqslant 0\Leftrightarrow(\sin x-1)(\sin x-2)\geqslant 0$，后一不等式显然成立，且等号在 $\sin x=1$ 时取到. 可见 $y_{\min}=3$.

例 4　现有 A、B、C、D 四个长方体容器，它们的底面积和高分别为 a^2，a；a^2，b；b^2，a；b^2，b(其中 $a\neq b$). 规定一种两人参加的游戏，其规则是：每人一次从四个容器中取出两个，盛水多者为胜，问先取者有没有必胜的方案？若有的话有几种？

分析　由题意，易知 A、B、C、D 四个容器的容积分别为 a^3，a^2b，ab^2，b^3. 四个容器平均分成两组只有三种情况：A、B 和 C、D；A、C 和 B、D；A、D 和 B、C. 因此问题的实质是比较容积两两和的大小.

解　(1) 若先取 A、B，则后取者只能取 C、D，

$$(a^3+a^2b)-(ab^2+b^3)=(a-b)(a+b)^2.$$

显然 $a+b>0$，$(a+b)^2>0$，而 a 与 b 的大小不确定，$(a-b)(a+b)^2$ 的正负不能确定，即 a^3+a^2b 与 ab^2+b^3 的大小不定，这种取法无必胜的把握.

(2) 若先取 A、C，则后取者只能取 B、D，

$$(a^3+ab^2)-(a^2b+b^3)=(a-b)(a^2+b^2).$$

类似于(1)的分析，知这种取法也无必胜的把握.

(3) 若先取 A、D，则后取者只能取 B、C，

$$(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)=(a-b)^2(a+b).$$

已知 $a\neq b$，所以 $(a-b)^2(a+b)>0$，即 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

故先取 A、D 是唯一必胜的方案.

例 5　求满足下列条件的最小的正整数 n：对于 n，存在正整数 k，使 $\dfrac{8}{15}<\dfrac{n}{n+k}<\dfrac{7}{13}$ 成立.

解　由已知得 $\dfrac{15}{8}>\dfrac{n+k}{n}>\dfrac{13}{7}$，即 $\dfrac{15}{8}>1+\dfrac{k}{n}>\dfrac{13}{7}$，所以 $\dfrac{6}{7}<\dfrac{k}{n}<\dfrac{7}{8}$，$n$，$k$ 为正整数.

显然 $n>8$，取 $n=9$ 则 $\dfrac{54}{7}<k<\dfrac{63}{8}$，没有整数 k 的值，依次取 $n=10$，$n=11$，$n=12$，$n=13$，$n=14$ 时，分别得 $\dfrac{60}{7}<k<\dfrac{70}{8}$，$\dfrac{66}{7}<k<\dfrac{77}{8}$，$\dfrac{72}{7}<k<\dfrac{84}{8}$，$\dfrac{78}{7}<k<\dfrac{91}{8}$，$\dfrac{84}{7}<k<\dfrac{98}{8}$，$k$ 都取不到整数，当 $n=15$ 时，$\dfrac{90}{7}<k<\dfrac{105}{8}$，$k$ 取 13 即可满足，所以 n 的最小值是 15.

例 6 若正实数 a、b 和实数 x、y 满足 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$， (1)

试比较 a^2+b^2 与 $(x+y)^2$ 的大小.

解 $a^2+b^2\geqslant(a^2+b^2)\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)=x^2+y^2+\dfrac{b^2x^2}{a^2}+\dfrac{a^2y^2}{b^2}$

$$=x^2+y^2+\left(\frac{b}{a}x-\frac{a}{b}y\right)^2+2xy\geqslant x^2+y^2+2xy$$

故 $a^2+b^2\geqslant(x+y)^2$，等号成立的条件是 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，且 $\dfrac{b}{a}x-\dfrac{a}{b}y=0$，

即 $x=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$y=\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 时取等号.

说明 由于(1)表示一个椭圆及其内部，通过比较，我们得到了椭圆不等式：

① 若 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$，则 $a^2+b^2\geqslant(x+y)^2$.

特例：若 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则 $a^2+b^2\geqslant(x+y)^2$.

② 推广：以 $\dfrac{x}{r}$、$\dfrac{y}{r}$ 替换(1)中的 x、y，可得如下不等式：

若 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant r^2$，则 $r^2(a^2+b^2)\geqslant(x+y)^2$.

例 7 设 x、y、$z\in\mathbf{R}^+$，试比较 $x^3+y^3+z^3+3xyz$ 与 $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)$ 的大小.

分析 题给两式关于 x、y、z 是对称的，我们可设 $x\leqslant y\leqslant z$.

解 不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$，则

$$\begin{aligned}&x^3+y^3+z^3-x^2(y+z)-y^2(z+x)-z^2(x+y)+3xyz\\&=x^3-x^2(y+z)+xyz+y^3+z^3-y^2z-z^2y-x(y-z)^2\\&=x(x-y)(x-z)+(y+z)(y-z)^2-x(y-z)^2\\&=x(x-y)(x-z)+(y-z)^2(y+z-x).\end{aligned}$$

由于 $x\leqslant y\leqslant z$，并且 x、y、$z\in\mathbf{R}^+$，所以上式是非负的. 即

$$x^3+y^3+z^3-x^2(y+z)-y^2(z+x)-z^2(x+y)-3xyz\geqslant 0.$$

故 $x^3+y^3+z^3+3xyz\geqslant x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)$.

例 8 设 $a>0$，$b>0$，且 $a\neq b$，试比较大小：

(1) a^ab^b 与 a^bb^a；(2) $a^ab^bc^c$ 与 $(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

分析 比较大小的最常见方法是作差法和作商法，本题可作商后利用幂运算及单调性比较大小，也可取对数后作差比较.

(1) **解法 1** （作商比较法）因为 $\dfrac{a^a b^b}{a^b b^a} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}$，且 $a > 0,\ b > 0,\ a \neq b$.

若 $a > b$，则 $\dfrac{a}{b} > 1,\ a - b > 0$，所以 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b} > \left(\dfrac{a}{b}\right)^{0} = 1$；

若 $a < b$，则 $0 < \dfrac{a}{b} < 1,\ a - b < 0$，也有 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b} > \left(\dfrac{a}{b}\right)^{0} = 1$；

因此 $a^a b^b > a^b b^a$.

解法 2 （取对数后作差比较）因为 $\ln(a^a b^b) - \ln(a^b b^a) = a\ln a + b\ln b - b\ln a - a\ln b = (a-b)(\ln a - \ln b)$.

若 $a > b$，则 $a - b > 0,\ \ln a - \ln b > 0$，所以 $(a-b)(\ln a - \ln b) > 0$；

若 $a < b$，则 $a - b < 0,\ \ln a - \ln b < 0$，也有 $(a-b)(\ln a - \ln b) > 0$；

故有 $\ln(a^a b^b) - \ln(a^b b^a) > 0$，因此 $a^a b^b > a^b b^a$.

(2) 由(1)的结果，因为 $a^a b^b \geqslant a^b b^a$，所以 $a^a b^b c^c \geqslant a^b b^a c^c$，

同理可得 $a^a c^c b^b \geqslant a^c c^a b^b$，$b^b c^c a^a \geqslant b^c c^b a^a$，

三式相乘，得 $(a^a b^b c^c)^3 \geqslant a^{b+c+a} b^{a+b+c} c^{c+a+b}$，

所以 $a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

例 9 已知 $x > 0,\ x \neq 1,\ m > n > 0$，比较 $x^m + \dfrac{1}{x^m}$ 与 $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ 的大小.

解 本题需对 x 分类讨论，即讨论 $0<x<1$ 和 $x>1$ 两种情况.

解法 1 $x^m + \dfrac{1}{x^m} - \left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right) = x^m - x^n + \dfrac{1}{x^m} - \dfrac{1}{x^n} = x^m - x^n - \dfrac{x^m - x^n}{x^{m+n}}$

$$= (x^m - x^n)\left(1 - \frac{1}{x^{m+n}}\right).$$

当 $0 < x < 1$ 时，由 $m > n > 0$，知 $x^m < x^n$ 且 $x^{m+n} < 1$.

所以 $1 - \dfrac{1}{x^{m+n}} < 0$，故 $(x^m - x^n)\left(1 - \dfrac{1}{x^{m+n}}\right) > 0$；

当 $x > 1$ 时，由 $m > n > 0$，知 $x^m > x^n$ 且 $x^{m+n} > 1$，

所以 $1 - \dfrac{1}{x^{m+n}} > 0$，故 $(x^m - x^n)\left(1 - \dfrac{1}{x^{m+n}}\right) > 0$.

综上，得 $x^m + \dfrac{1}{x^m} - \left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right) > 0$，即 $x^m + \dfrac{1}{x^m} > x^n + \dfrac{1}{x^n}$.

解法 2 $x^m + \dfrac{1}{x^m}$ 与 $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ 的形式完全一致，故可以将其看成函数 $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ 的两个函数值. 从而根据函数单调性求解.

设 $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$，当 $x \in [1, +\infty)$ 时递增，$x \in (0, 1)$ 时递减.

当 $0 < x < 1$ 时，因为 $m > n > 0$，

所以 $0 < x^m < x^n < 1$，所以 $x^m + \frac{1}{x^m} > x^n + \frac{1}{x^n}$；

当 $x > 1$ 时，因为 $m > n > 0$，

所以 $x^m > x^n > 1$，所以 $x^m + \frac{1}{x^m} > x^n + \frac{1}{x^n}$.

综上，得 $x^m + \frac{1}{x^m} > x^n + \frac{1}{x^n}$.

例 10 已知 $3^a + 13^b = 17^a, 5^a + 7^b = 11^b$，试判断实数 a, b 的大小关系，并证明你的结论.

分析 这是一道探索性问题，可从特殊情形入手，先探索出 a, b 的大小关系，然后再加以证明. 注意到题目的特点，可构造指数函数，利用指数函数的单调性加以证明.

解 令 $a = 1$，则由题设得 $13^b = 14$，$5 + 7^b = 11^b$，可见 $b > 1$. 猜想：$a < b$.

下面用反证法证明：

假设 $a \geqslant b$，则 $13^a \geqslant 13^b$，$5^a \geqslant 5^b$.

所以 $17^a = 3^a + 13^b \leqslant 3^a + 13^a$，$11^b = 5^a + 7^b \geqslant 5^b + 7^b$，即

$$\left(\frac{3}{17}\right)^a + \left(\frac{13}{17}\right)^a \geqslant 1,\ \left(\frac{5}{11}\right)^b + \left(\frac{7}{11}\right)^b \leqslant 1.$$

因为 $f(x) = \left(\frac{3}{17}\right)^x + \left(\frac{13}{17}\right)^x$ 和 $g(x) = \left(\frac{5}{11}\right)^x + \left(\frac{7}{11}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上均为减函数，且

$$f(1) = \frac{3}{17} + \frac{13}{17} = \frac{16}{17} < 1 \leqslant f(a),$$

$$g(1) = \frac{5}{11} + \frac{7}{11} = \frac{12}{11} > 1 \geqslant g(b).$$

所以 $a < 1$，$b > 1$. 这与 $a \geqslant b$ 矛盾.

故 $a < b$.

说明 "探索—猜想—证明"，这是一种常用的解题方法. 其中构造单调函数是解答本题的关键.

例 11 一条直角走廊宽 1.5 米，如图 1-2 所示. 现有一转动灵活的手推车，其平板矩形的宽为 1 米，问要顺利推过直角走廊，平板车的长度不能超过多少米？

该问题情景和设问简洁、明了，在生活中也常遇到. 如何选择有效的方法和手段，通过观察、分析、抽象和建模，应用学过的相关知识来解决问题. 这是一个很好的例子.

分析 凭直觉认为平板车与墙面成 45° 角时，平板车可以顺利推过拐角，车身的长度（如图 1-2）$CD = AB - 2BD = 3\sqrt{2} - 2$（米），为什么？

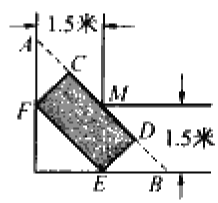


图 1-2

考虑一根水平放置的竹竿经过点 M，竹竿两个端点 A，B 分别在

墙壁上(如图 1-3). 若竹竿与墙面的夹角 θ 大于或小于 45°时都不能顺利通过拐角. 只有在 θ 等于 45°时才能通过, 此时竹竿 AB 的长度最短. 如果 $\theta \neq 45°$, AB 的长度超过某一个值, 这根竿只能单方向通过.

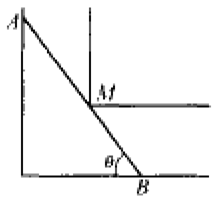


图 1-3

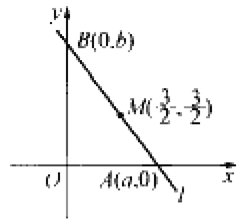


图 1-4

根据上述分析, 可以把问题抽象为:

在直角坐标系中, 过定点 $M\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 的直线 l, 分别与 x 轴、y 轴的正半轴交于 A、B 两点, 试求线段 AB 的最小值(如图 1-4).

当 AB 长度最小时, 平板车的长度 CD, 即为可以顺利推过拐角的最大长度.

解决上面的最值问题, 有如下思路:

(1) 设直线 l 与 x 轴、y 轴交于 $A(a, 0)$, $B(0, b)$ 两点 $(a>0, b>0)$, 它经过点 $M\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 即满足条件: $\frac{3}{2a}+\frac{3}{2b}=1$, 即 $3(a+b)=2ab$, 又 $AB=\sqrt{a^2+b^2}$, 于是问题转化为: 当 $a>0$, $b>0$ 且 $3(a+b)=2ab$ 时, 求 $AB=\sqrt{a^2+b^2}$ 的最小值.

(2) 设 $\angle OAB=\theta$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $AB=AM+MB=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right)$, 问题转化为: 当 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 求函数 $g(\theta)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right)$ 的最小值.

解　$AB=g(\theta)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right) \geq \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1+\sin 2\theta}{\frac{1}{4}\sin^2 2\theta}}=3\sqrt{\frac{1}{\sin^2 2\theta}+\frac{1}{\sin 2\theta}}$.

因为 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $0<\sin 2\theta \leqslant 1$, 易知 $\sin 2\theta=1$ 时, $g(\theta)$ 有最小值 $3\sqrt{2}$, 即 AB 有最小值 $3\sqrt{2}$, 此时 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

说明　实践能力是将客观事物数学化的能力, 主要过程是依据现实的生活背景, 提炼相关的数量关系, 构造数学模型, 将现实问题转化为数学问题, 并加以解决. 数学学科就是要在学习过程中学会思考. 本例的几种解法, 涉及了函数的单调性、三角函数的有界性、重要不等式的应用等. 最后指出一个问题, 假如该走廊的宽不相等, 如东西方向的宽为 2 米, 南北方向的宽为 1.5 米, 此时平板车可以顺利通过的长是多少?

例 12 今有男女各 $2n$ 人，围成内外两圈跳邀请舞，每圈各 $2n$ 人，有男有女. 跳舞规则如下：每当音乐一起，如面对面是一男一女，则男的邀请女的跳舞，如果均是男的，或者均是女的，则鼓掌助兴，曲终时，外圈的人均向前一步，如此继续，试证：在整个跳舞过程中，至少有一次起舞的男女不少于 n 对.

分析 我们不能局限在哪一次起舞的过程，也没有办法去确定哪一次起舞的男女不少于 n 对，只能对本题的结果整体思考.

我们设内圈的人为 $x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$，外圈的人为 $y_1, y_2, \cdots, y_{2n}$，并设男的为 $+1$，女的为 -1. 有了以上的赋值，可以使问题数学化.

考察 x_iy_i：

若 x_i 和 y_i 都是男的或者都是女的，依题设，则不起舞，此时有 $x_iy_i=+1>0$.

若 x_i 和 y_i 一是男、一女，依题设，则起舞，此时有 $x_iy_i=-1<0$.

考虑结论的整体，假定每次起舞都小于 n 对，即结论不成立，我们可寻求可能发生的矛盾.

由于总对数为 $2n$ 对，若每次起舞者都小于 n 对，则起舞者小于不起舞者，则有

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{2n}y_{2n}>0;$$

$$x_1y_2+x_2y_3+\cdots+x_{2n}y_1>0;$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_1y_{2n-1}+x_2y_n+\cdots+x_{2n}y_{2n-2}>0;$$

$$x_1y_{2n}+x_2y_1+\cdots+x_{2n}y_{2n-1}>0.$$

将以上 $2n$ 个不等式相加得 $(x_1+x_2+\cdots+x_{2n})(y_1+y_2+\cdots+y_{2n})>0$. (1)

下面针对(1)式，研究 $x_1+x_2+\cdots+x_{2n}$ 和 $y_1+y_2+\cdots+y_{2n}$.

设内圈有 k 个男的，则有 $2n-k$ 个女的，此时外圈有 $2n-k$ 个男的，k 个女的，于是

$$x_1+x_2+\cdots+x_{2n}=k\cdot(+1)+(2n-k)\cdot(-1)=2k-2n,$$

$$y_1+y_2+\cdots+y_{2n}=(2n-k)\cdot(+1)+k\cdot(-1)=2n-2k.$$

两式相乘，得 $(x_1+x_2+\cdots+x_{2n})(y_1+y_2+\cdots+y_{2n})=-4(n-k)^2\leqslant 0$. (2)

(1)与(2)发生矛盾. 于是，一定有一次起舞的男女不小于 n 对.

说明 当题目的结论整体性很强，而从局部并不容易去思考时，我们常常把结论的对象看做一个整体，并从整体上去研究结论的特征，从而获得解题的方法.

例 13 （第七届日本数学奥林匹克竞赛试题）把 26 个玻璃球分装在 a、b、c、d、e 五个袋子里，每个袋子里的球数不同且都装了 1 个以上. 用一台天平称重量，当称到装有 11 个玻璃球的袋子时，超重警铃就会响. 看下图 1－5.

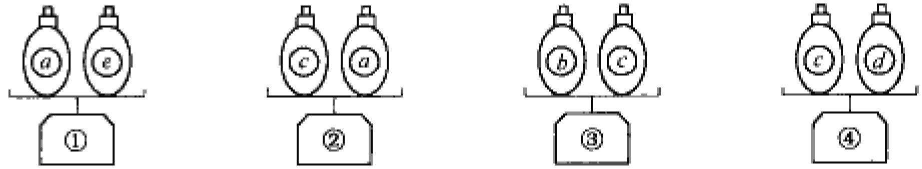


图 1－5

当①、③、④的状态时，警铃就响；②的状态时，警铃不响.

请按从小到大的顺序写出装入5个袋中玻璃球的数量的组合(例如：1，3，5，7，10)，并写出所有的组合.

解 根据题意，a、b、c、d、e 袋中装的玻璃球的数量各不相同. a、b、c、d、e 五个袋子里共装有26个玻璃球. 这26个玻璃球的重量应是相同的，所以五个袋子的重量各不相同. 用一台天平称重，当称到装有11个玻璃球的袋子时，超重警铃就会响，这一条件，应理解为天平称得的玻璃球个数是11或多于11个时，超重警铃就会响. 从给出的条件可知：

$$\begin{cases} a+e\geqslant 11, & (1)\\ c+a<11, & (2)\\ b+c\geqslant 11, & (3)\\ c+d\geqslant 11, & (4)\\ a+b+c+d+e=26. & (5)\end{cases}$$

比较(2)、(3)、(4)式可知，$a<b$，$a<d$.

由(1)+(3)，(1)+(4)，(5)式可得：$\begin{cases} a+b+c+e\geqslant 22,\\ a+c-d+e\geqslant 22,\\ a+b+c+d+e=26.\end{cases}$

由上面的三个式子可知，b、d 两袋中球的数量是4或3或2或1个，但由于 $a<b$，$a<d$，所以 a 袋中球的数量是2或1个，b、d 两袋中的球只能是4或3或2个. 进一步由(2)、(3)、(4)式可知，c 袋中球的数量只能是8或9个.

由此可列举出符合题意的数组，它们是：

(1，2，3，9，11)，(1，2，4，9，10)

(1，3，4，8，10)，(2，3，4，8，9)

例 14 对于任意的正实数 a，b，试比较 $\sqrt{\dfrac{a}{a+3b}}+\sqrt{\dfrac{b}{b+3a}}$ 与1的大小.

分析 1 由于所给式子比较复杂，不妨假定 $\sqrt{\dfrac{a}{a+3b}}+\sqrt{\dfrac{b}{b+3a}}\geqslant 1$，通过等价转化的方法进行比较.

解 1 令 $\frac{b}{a}=t>0$，则 $b=at$.

假设 $\sqrt{\frac{a}{a+3b}}+\sqrt{\frac{b}{b+3a}}\geqslant 1$，则它等价于 $\sqrt{\frac{1}{1+3t}}+\sqrt{\frac{t}{t+3}}\geqslant 1$，等价于 $\sqrt{\frac{t}{t+3}}\geqslant 1-\sqrt{\frac{1}{1+3t}}$，等价于 $\sqrt{\frac{1}{1+3t}}\geqslant\frac{5t+3}{(1+3t)(3+t)}$，等价于 $\sqrt{1+3t}(3+t)\geqslant(5t+3)$，等价于 $t(t^2-2t+1)\geqslant 0$，等价于 $t(t-1)^2\geqslant 0$，因为 $t>0$，所以 $t(t-1)^2\geqslant 0$ 是显然的. 从而假设不等式成立，并且从推证过程可以看出当且仅当 $t=1$ 即 $a=b$ 时等号成立.

故当 $a=b$ 时，$\sqrt{\frac{a}{a+3b}}+\sqrt{\frac{b}{b+3a}}=1$；

当 $a\neq b$ 时，$\sqrt{\frac{a}{a+3b}}+\sqrt{\frac{b}{b+3a}}>1$.

分析 2 将代数式"活化"，把二次根式看作两点间距离，则用几何方法可进行证明，这样就拓宽了解题思路，让人耳目一新.

解 2 因为 a、$b>0$，所以假设不等式 $\sqrt{\frac{a}{a+3b}}+\sqrt{\frac{b}{3a+b}}\geqslant 1$，等价于 $\sqrt{a(3a+b)}+\sqrt{b(a+3b)}\geqslant\sqrt{(3a+b)(a+3b)}$，即 $\sqrt{3a^2+ab}+\sqrt{3b^2+ab}\geqslant\sqrt{3a^2+3b^2+10ab}$，

$$\sqrt{(\sqrt{3}a-0)^2+(\sqrt{ab}-0)^2}+\sqrt{[0-(-\sqrt{3}b)]^2+[0-(-\sqrt{ab})]^2}$$
$$\geqslant\sqrt{[\sqrt{3}a-(-\sqrt{3}b)]^2+[\sqrt{ab}-(-\sqrt{ab})]^2}.$$

在直角坐标系中取点 $A(\sqrt{3}a,\sqrt{ab})$，$O(0,0)$，$B(-\sqrt{3}b,-\sqrt{ab})$，于是，

$|AO|+|OB|=\sqrt{(\sqrt{3}a-0)^2+(\sqrt{ab}-0)^2}+\sqrt{[0-(-\sqrt{3}b)]^2+[0-(-\sqrt{ab})]^2}$，

$|AB|=\sqrt{[\sqrt{3}a-(-\sqrt{3}b)]^2+[\sqrt{ab}-(-\sqrt{ab})]^2}$，

因为 $|AO|+|OB|\geqslant|AB|$ 成立，从而如下不等式成立，

$$\sqrt{(\sqrt{3}a-0)^2+(\sqrt{ab}-0)^2}+\sqrt{[0-(-\sqrt{3}b)]^2+[0-(-\sqrt{ab})]^2}$$
$$\geqslant\sqrt{[\sqrt{3}a-(-\sqrt{3}b)]^2+[\sqrt{ab}-(-\sqrt{ab})]^2}，$$

从而知假设不等式对 $a,b>0$ 恒成立，故 $a,b>0$ 时，总有 $\sqrt{\frac{a}{a+3b}}+\sqrt{\frac{b}{b+3a}}\geqslant 1$.

例 15 设 $x,y\in\mathbf{R}$，M 为 x^2+xy+y^2，$x^2+x(y-1)+(y-1)^2$，$(x-1)^2+(x-1)y+y^2$，$(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2$ 中最大的数，求 M 的最小值.

分析 此类问题属于复合最值（或双层最值）问题，均值法是处理这类问题最常用的手段，但是要注意取得最值的条件.

经验证得知：对于任意的实数 x,y：

$$x^2+xy+y^2;\quad x^2+x(y-1)+(y-1)^2;$$

$(x-1)^2+(x-1)y+y^2$； $(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2$

不可能同时全部相等，所以在用均值法时要运用一点"技巧"．

由于对任意的实数 x，y：

$[x^2+xy+y^2+(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2]-[x^2+x(y-1)+(y-1)^2+(x-1)^2+(x-1)y+y^2]=1$，恒大于零．

所以 $2M\geqslant[x^2+xy+y^2+(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2]$

$$=2x^2+2xy+2y^2-3x-3y+3$$

$$=\frac{3}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(x-y)^2-3(x+y)+3$$

$$=\frac{3}{2}(x+y-1)^2+\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{3}{2}\geqslant\frac{3}{2}.$$

当且仅当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时等号同时成立，所以 M 的最小值是 $\frac{3}{4}$．

此时 $x^2+xy+y^2=\frac{3}{4}$，$x^2+x(y-1)+(y-1)^2=\frac{1}{4}$，

$$(x-1)^2+(x-1)y+y^2=\frac{1}{4},$$

$$(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2=\frac{3}{4}.$$

原问题得解．

例 16 （2005 年全国高中数学联合竞赛四川初赛题）某班有 20 人，参加语文、数学考试各一次，考试结果是：① 没有 0 分；② 没有两个同学的语文、数学成绩相同．

我们说"同学 A 比 B 的成绩好"，是指"同学 A 的语文、数学成绩都不低于 B"．

证明：存在三个同学 A、B、C，使得同学 A 比同学 B 的成绩好，同学 B 比 C 的成绩好．

证明 若同学 A 比 B 的成绩好，记为 $A>B$．原问题等价于证明：存在三个同学 A、B、C 满足 $A>B>C$

用 (a_i, b_i) 表示第 i 个同学的语文、数学成绩 $(i=1, 2, \cdots, 20)$．

于是 $(a_i, b_i)<(a_j, b_j)\Leftrightarrow a_i\leqslant a_j$，$b_i\leqslant b_j$ 且等号不能同时成立．

因为语文成绩 $a_i(i=1, 2, \cdots, 20)$ 在 1 到 10 的整数值中取值，对这 20 个同学的语文成绩，由抽屉原理知，下列情形之一必然出现．

情形 1：某个分数值，至少有 3 人取得．即存在某个 $m\in\{1, 2, \cdots, 10\}$，使得 $a_i=a_j=a_k=m$（其中 i，j，k 两两不等）．

情形 2：每个分数值，恰好均有 2 人取得，即对任意的 $f\in\{1, 2, \cdots, 10\}$，存在不同的 i，j，使得 $a_i=a_j=f$．

同理，对于数学成绩 b_i 同样有两种情形：

情形 1′：存在某个 $n\in\{1, 2, \cdots, 10\}$，使得 $b_{i'}=b_{j'}=b_{k'}=n$（其中 i'，j'，k' 两两不等）．

情形 2′：对任意的 $g\in\{1, 2, \cdots, 10\}$，存在不同的 i'，j'，使得 $b_i=b_j=g$.

下面进行讨论：

对情形 1：若 $a_i=a_j=a_k=m$，则由条件知 b_i，b_j，b_k 两两不等. 不失一般性，不妨设 $b_i<b_j<b_k$，则 $(a_i, b_i)<(a_j, b_j)<(a_k, b_k)$，即存在三个同学 A、B、C 满足 $A>B>C$.

对情形 1′：同理可证.

对情形 2：有两个 $a_i=1$，不失一般性设 $a_i=a_j=1$，于是得 $(1, b_i)$，$(1, b_j)$，且 $b_i\neq b_j$. 不失一般性，设 $b_i<b_j$，则 $(1, b_i)<(1, b_j)$.

这时，对于 b_j 若出现情形 1′，则结论成立；若出现情形 2′，则必有 2 人得 10 分，不妨设为 a_k，a_l，易知 a_k，a_l 中至少有一个不取 1（否则与条件②矛盾），设为 a_k，则 $1<a_k$.

故结论成立.

对于情形 2′，同理可证.

综上所述，结论成立.

思考交流

思考题 1　设实数 x，y 满足 $-1<x<1$，$-1<y<1$. 试比较 $\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2}$ 与 $\frac{2}{1-xy}$ 的大小.

分析　由所给两个式子的结构，联想类比无穷递缩等比数列求和公式 $S=\frac{a_1}{1-q}=a_1+a_1q+\cdots+a_1q^{n-1}+\cdots(|q|<1)$，可快捷简洁获解.

解　因为 $|x|<1$，$|y|<1$，所以 $x^2<1$，$y^2<1$，故 $\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+\cdots$，

$$\frac{1}{1-y^2}=1+y^2+y^4+\cdots,$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2}&=(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)+(1+y^2+y^4+y^6+\cdots)\\&=2+(x^2+y^2)+(x^4+y^4)+(x^6+y^6)+\cdots\\&\geqslant 2+2xy+2x^2y^2+2x^3y^3+\cdots=\frac{2}{1-xy}.\end{aligned}$$

说明　(1) 类似上面解法，可将结论推广到更一般情形：

设 $0<a_i<1(i=1, 2, \cdots, n, n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-a_i^n}\geqslant\frac{n}{1-a_1a_2\cdots a_n}$.

(2) 对于某些分式不等式的问题，若各项出现 $\frac{a}{b\pm c}$ 或 $\frac{a^2}{b\pm c}$ 的形式时，如果对这些项经过

适当的变换，或引入适当的辅助量后，能够变换成 $\frac{a_1}{1-q}$（$|q|<1$）的形式，就可以考虑用上面所介绍的方法求解。

但是，如果是求最值，且 $x\neq y$，请看下题：

（2003 年全国高中数学联赛试题）已知 x、$y\in(-2,2)$，且 $xy=-1$，求函数 $u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2}$ 的最小值。

解 因为 x、$y\in(-2,2)$，所以 $\left(\frac{x}{2}\right)^2<1$，$\left(\frac{y}{3}\right)^2<1$。

由于 $xy=-1$，于是，有

$$u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2}=\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{y}{3}\right)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{y}{3}\right)^{2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}+\left(\frac{y}{3}\right)^{2k}\right]\geqslant 2\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left(\frac{x}{2}\right)^k\right|\left|\left(\frac{y}{3}\right)^k\right|$$

$$=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{6^k}=2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{12}{5}.$$

当且仅当 $\left|\frac{x}{2}\right|=\left|\frac{y}{3}\right|$ 时，函数 u 取得最小值 $\frac{12}{5}$。此时，由

$$\begin{cases}\left|\frac{x}{2}\right|=\left|\frac{y}{3}\right|,\\ xy=-1,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{6}}{3},\\ y=-\frac{\sqrt{6}}{2},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{6}}{3},\\ y=\frac{\sqrt{6}}{2}.\end{cases}$

注 由条件 $xy=-1$ 知 $\frac{x}{2}\neq\frac{y}{3}$，故不能根据思考题 1 的结论得出 $u=\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{y}{3}\right)^2}$ 的最小值是 $\frac{2}{1-\frac{xy}{6}}=\frac{12}{7}$。将此题展成无穷递缩等比数列各项和的形式后，应利用不等式 $a^2+b^2\geqslant 2|ab|$ 进行放缩，因为此时等号能够成立。

思考题 2 （1998 年全国高中数学联赛第二试第二题）设 a_1，a_2，…，a_n；b_1，b_2，…，$b_n\in[1,2]$，且 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$，求证：$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\frac{17}{10}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$。

证明 构造函数 $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\left(x+\frac{2}{5}\right)$，则当 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)\leqslant 0$.

故 $x^3-\frac{21}{10}x^2+\frac{2}{5}\leqslant 0$，即 $x^3\leqslant\frac{21}{10}x^2-\frac{2}{5}$.

又 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{a_i}{b_i}\leqslant 2$，所以 $\frac{a_i^3}{b_i^3}\leqslant\frac{21}{10}\frac{a_i^2}{b_i^2}-\frac{2}{5}$，所以 $\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\frac{21}{10}a_i^2-\frac{2}{5}b_i^2$.

故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\frac{21}{10}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-\frac{2}{5}\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2=\frac{21}{10}\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2-\frac{2}{5}\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2=\frac{17}{10}\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2$.

说明 这是一道具有很高探索价值的好试题，从不同角度对其深挖细掘，不仅可把它的结论推广到了一般的情形，还可得到不少的额外收获.

下面我们证它的推广命题.

推广命题 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n\in[1, 2]$，$m\in\mathbf{N}$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{m+2}}{b_i^m}\leqslant\frac{1}{5}\cdot\frac{4^{m+1}+1}{2^m}\sum_{i=1}^{n}a_i^2. \tag{1}$$

为证明推广命题，先要证明一个引理.

引理 设 $a, b\in[1, 2]$，$m\in\mathbf{N}^*$，则

$$\frac{a^{m+2}}{b^m}\leqslant\frac{1}{15}\cdot\frac{4^{m+2}-1}{2^m}a^2-\frac{4}{15}\cdot\frac{4^m-1}{2^m}b^2. \tag{2}$$

分析 因为 $a, b\in[1, 2]$，所以 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{a}{b}\leqslant 2$，$\left(\frac{a}{b}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{b}-2\right)\leqslant 0$，

变形即 $a^2+b^2\leqslant\frac{5}{2}ab$. (3)

于是 $\frac{a^3}{b}\leqslant\frac{5}{2}a^2-ab\leqslant\frac{5}{2}a^2-\frac{2}{5}(a^2+b^2)$，

即 $\frac{a^3}{b}\leqslant\frac{21}{10}a^2-\frac{2}{5}b^2$. (4)

(4) 两边同乘 $\frac{a}{b}$，并结合(3)、(4)得

$$\frac{a^4}{b^2}\leqslant\frac{21}{10}\cdot\frac{a^3}{b}-\frac{2}{5}ab\leqslant\frac{21}{10}\left(\frac{21}{10}a^2-\frac{2}{5}b^2\right)-\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}(a^2+b^2),$$

即 $\frac{a^4}{b^2}\leqslant\frac{17}{4}a^2-b^2$. (5)

在(5)两边同乘 $\frac{a}{b}$，类似地可求出关于 $\frac{a^5}{b^3}$ 的不等式，上述过程反复进行下去，一般地可得

$\frac{a^{m+2}}{b^m}\leqslant x_m a^2-y_m b^2$. (6)

结合(3)、(4)得 $\frac{a^{n+3}}{b^{n+1}} \leqslant x_n \cdot \frac{a^3}{b} - y_n ab \leqslant x_n\left(\frac{21}{10}a^2 - \frac{2}{5}b^2\right) - y_n \cdot \frac{2}{5}(a^2+b^2)$.

即 $\frac{a^{n+3}}{b^{n+1}} \leqslant \left(\frac{21}{10}x_n - \frac{2}{5}y_n\right)a^2 - \frac{2}{5}(x_n+y_n)b^2$. (7)

令 $x_{n+1} = \frac{21}{10}x_n - \frac{2}{5}y_n$, $y_{n+1} = \frac{2}{5}(x_n+y_n)$.

消去 y_n, y_{n+1} 得 $\frac{21}{10}x_{n+1} - x_{n+2} = \frac{2}{5}\left[\frac{2}{5}x_n + \left(\frac{21}{10}x_n - x_{n+1}\right)\right]$,

化简即 $x_{n+2} - \frac{5}{2}x_{n+1} + x_n = 0$,

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_{n+1} - 2x_n). \quad (8)$$

由(4)、(5),知 $x_1 = \frac{21}{10}$, $x_2 = \frac{17}{4}$,故由(8)得

$$x_{n+1} - 2x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x_2 - 2x_1) = \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

变形即 $2^{n+1}x_{n+1} + \frac{1}{15} = 4\left(2^n x_n + \frac{1}{15}\right)$,所以

$$2^n x_n + \frac{1}{15} = 4^{n-1}\left(2x_1 + \frac{1}{15}\right) = 4^{n-1}\left(\frac{21}{5} + \frac{1}{15}\right) = \frac{4^{n+2}}{15},$$

即 $x_n = \frac{1}{15}\cdot\frac{4^{n+2}-1}{2^n}$,

代入 $x_{n+1} = \frac{21}{10}x_n - \frac{2}{5}y_n$,可得 $y_n = \frac{4}{15}\cdot\frac{4^n-1}{2^n}$.

将 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 的通项代入(6),即得(2)式((2)的严格的证明可用数学归纳法进行,略去).

推广命题的证明

因为 $a_i, b_i \in [1, 2]$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$

故 $\frac{a_i^{n+2}}{b_i^n} \leqslant \frac{1}{15}\cdot\frac{4^{n+2}-1}{2^n}a_i^2 - \frac{4}{15}\cdot\frac{4^n-1}{2^n}b_i^2$,两边关于 i 求和,并注意到 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2$,

得 $$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{n+2}}{b_i^n} \leqslant \frac{1}{15}\cdot\frac{4^{n+2}-1}{2^n}\sum_{i=1}^n a_i^2 - \frac{4}{15}\cdot\frac{4^n-1}{2^n}\sum_{i=1}^n b_i^2$$

$$= \left(\frac{1}{15}\cdot\frac{4^{n+2}-1}{2^n} - \frac{4}{15}\cdot\frac{4^n-1}{2^n}\right)\sum_{i=1}^n a_i^2,$$

即 $$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{n+2}}{b_i^n} \leqslant \frac{1}{5}\cdot\frac{4^{n+1}+1}{2^n}\sum_{i=1}^n a_i^2.$$

注 (1) 本讲提到的思考题2,从(4)出发即可获得简证.

(2) 注意到引理中 a, b 地位平等,故在引理条件下必同时成立

$$\frac{b^{m+2}}{a^m} \leqslant \frac{1}{15} \cdot \frac{4^{m+2}-1}{2^m} b^2 - \frac{4}{15} \cdot \frac{4^m-1}{2^m} a^2. \tag{9}$$

(2)+(9) 得额外收获:a, $b \in [1, 2]$, $m \in \mathbf{N}^*$ 时,

$$\frac{a^{m+2}}{b^m} + \frac{b^{m+2}}{a^m} \leqslant \frac{1}{5} \cdot \frac{4^{m+1}-1}{2^m}(a^2+b^2).$$

一般地,对 $x_i \in [1, 2]$, $i = 1, 2, \cdots, k$; k, $m \in \mathbf{N}^*$,有

$$\frac{x_1^{m+2}}{x_2^m} + \frac{x_2^{m+2}}{x_3^m} + \cdots + \frac{x_{k-1}^{m+2}}{x_k^m} + \frac{x_k^{m+2}}{x_1^m} \leqslant \frac{1}{5} \cdot \frac{4^{m+1}+1}{2^m} \sum_{i=1}^{k} x_i^2.$$

同步检测 1

1. 设 $1<x<3$, $5<y<7$,则 $\frac{x}{y}$ 的取值范围是 ( )

A. $\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{5}\right)$ B. $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{7}\right)$ C. $\left(-\frac{1}{7}, \frac{3}{5}\right)$ D. $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{7}\right)$

2. 已知 a、b 是正实数,则不等式组 $\begin{cases} x+y>a+b \\ xy>ab \end{cases}$ 是不等式组 $\begin{cases} x>a \\ y>b \end{cases}$ 成立的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充分且必要条件 D. 既不充分又不必要条件

3. 设 $x=0.82^{0.5}$, $y=\sin 1$, $z=\log_3\sqrt{7}$,则 x、y、z 的大小关系是 ( )

A. $x<y<z$ B. $y<z<x$ C. $z<x<y$ D. $z<y<x$

4. 4枝郁金香与5枝丁香花的价格之和小于22元,而6枝郁金香与3枝丁香花的价格之和大于24元,则2枝郁金香与3枝丁香花的价格比较结果是 ( )

A. 2枝郁金香贵 B. 3枝丁香花贵 C. 相同 D. 不能确定

5. 设 $x_i \in \mathbf{R}$, $x_i \geqslant 0 (i=1, 2, 3, 4, 5)$, $\sum_{i=1}^{5} x_i = 1$,则 $\max\{x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_4, x_4+x_5\}$ 的最小值等于 ( )

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{8}$

6. 在锐角△ABC 中,$BC=a$, $CA=b$, $AB=c$,且 $a>b>c$,分别以 BC, CA, AB 边上的高 AD, BE, CF 为折线,将三角形折成平面角均为 $\theta(0<\theta<\pi)$ 的二面角,记折叠后的四面体 $ABCD$, $ABCE$, $ABCF$ 体积分别为 V_1, V_2, V_3,则下面结论正确的是 ( )

A. $V_1>V_2>V_3$　　B. $V_1<V_2<V_3$

C. $V_1>V_3>V_2$ 或 $V_3>V_1>V_2$　　D. V_1,V_2,V_3 大小不能确定

7. 在一次考试后，如果按顺序去掉一些高分，那么班级的平均分将降低；反之，如果按顺序去掉一些低分，那么班级的平均分将提高. 这两个事实可以用数学语言描述为：若有限数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，则________________________（结论用数学式子表示）.

8. 已知集合 $N=\{x|a+1\leqslant x<2a-1\}$ 是集合 $M=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$ 子集，则 a 的值域为________.

9. 已知 $1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4\leqslant a_5\leqslant a_6\leqslant 64$，则 $Q=\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_3}{a_4}+\dfrac{a_5}{a_6}$ 的最小值是________.

10. 已知 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，令

$$M=\left(\sum_{i=1}^{n}\tan\theta_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\cot\theta_i\right),\ N=\left(\sum_{i=1}^{n}\sin\theta_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\csc\theta_i\right),$$

则 M 与 N 的大小关系是________.

11. 已知实数 x、y 满足 $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})\geqslant 1$，求 $x+y$ 的最小值.

12. 若正数 a、b、c 满足不等式组

$$\begin{cases}\dfrac{11}{6}c<a+b<2c, & ①\\ \dfrac{3}{2}a<b+c<\dfrac{5}{3}a, & ②\\ \dfrac{5}{2}b<a+c<\dfrac{11}{4}b. & ③\end{cases}$$

试确定 a、b、c 的大小关系.

13.（第19届IMO试题）在一个有限的实数列中，任意7个连续项之和都是负数，而任意连续11项之和都是正数，试问，这样的数列最多有多少项？

14. 已知 n 个互不相等的正分数：$\dfrac{a_1}{b_1},\dfrac{a_2}{b_2},\cdots,\dfrac{a_n}{b_n}$，且 $a_i>0$，$b_i>0$，求证：$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ 在 $\min\left\{\dfrac{a_1}{b_1},\dfrac{a_2}{b_2},\cdots,\dfrac{a_n}{b_n}\right\}=\dfrac{a_l}{b_l}$，$\max\left\{\dfrac{a_1}{b_1},\dfrac{a_2}{b_2},\cdots,\dfrac{a_n}{b_n}\right\}=\dfrac{a_k}{b_k}$ 之间$\left(\dfrac{a_l}{b_l}\right.$ 表示诸分数中的最小分数，$\dfrac{a_k}{b_k}$ 表示各分数中的最大分数$\left.\right)$.

15. 设 $x<y<z$，比较 $xy^4+yz^4+zx^4$ 与 $yx^4+zy^4+xz^4$ 的大小.

16. 已知 a、b、c 为三个正实数，比较 $a^{2a}b^{2b}c^{2c}$ 与 $a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$ 的大小.

17. 已知 $0<x$、$y<1$，$n\in\mathbf{N}^*$，试比较 $\dfrac{x^n}{1-x^2}+\dfrac{y^n}{1-y^2}$ 和 $\dfrac{x^n+y^n}{1-xy}$ 的大小.

18. 设 $a=\log_4(3^x+4^x)$，$b=\log_5(5^x-3^x)$，若 $a\geqslant b$，试比较 a 与 x 的大小.

19. 甲乙两人同时同地沿同一路线走到同一地点，甲有一半时间以速度 m 行走，另一半时间以速度 n 行走；乙有一半路程以速度 m 行走，另一半路程以速度 n 行走，如果 $m\neq n$，问：甲乙两人谁先到达指定地点？若 $m=n$，结果又会怎样？

20. 已知 $f(x)=ax^2+bx$，满足 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$ 且 $2\leqslant f(1)\leqslant 4$，求 $f(-2)$的取值范围.

21. 设 N 为给定自然数，把 N 表示成 k 个自然数 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 之和. 若 $N=kt+r$(t，r 为非负整数)，$0\leqslant r<k(1<k\leqslant N)$，则乘积 $x_1x_2\cdots x_k$ 的最大值是 $t^{k-r}(t+1)^r$.

22. (2004 西部数学奥林匹克试题)求所有的整数 n，使得 $n^4+6n^3+11n^2+3n+31$ 是完全平方数.

23. 定义在$(-1, 1)$上的函数 $f(x)$满足：

(1) 对任意 $x, y\in(-1, 1)$，都有 $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$；

(2) 当 $x\in(-1, 0)$时，$f(x)>0$.

试比较 $f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{11}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n^2+3n+1}\right)$与 $f\left(\frac{1}{2}\right)$的大小.

24. 确定所有的正整数 n，使方程 $x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$ 有正整数解(x, y, z).

25. 有 8 个质量各不相同的物品，每个物品的质量都是整克数且都不超过 15 克. 小平想以最少的次数用天平称出其中质量最大的物品. 他用了如下的测定法：

(1) 把 8 个物品分成 2 组，每组 4 个，比较这 2 组的质量大小；

(2) 把以上 2 组中质量较大的 4 个再分成 2 组，即每组 2 个，再比较它们的质量大小；

(3) 把以上 2 组中质量较大的分成各 1 个，取出质量较大的 1 个.

小平称了 3 次天平都没有平衡，最后便得到一个物品.

可是实际上得到的是这 8 个物品当中质量从大到小排在第 5 位的物品.

问：小平找出的这个物品质量多大？并求出第二位的物品质量为多少克？

第2讲　不等式的解法

知识点金

1. 解不等式的基本思想

解不等式的基本思想是依据不等式的基本性质，进行等价转化，化归为一元一次不等式或一元二次不等式(组)来解。解不等式就是一个同解变形的过程，常常运用分类讨论、数形结合的思想方法，还应注意到不等式与方程、函数及其他知识的联系。

2. 一元多项式不等式的解法

(1) 一元一次不等式 $ax>b$ 的解法($ax<b$ 请读者自己分析)。

① 当 $a>0$ 时，其解集为 $\left\{x \middle| x>\frac{b}{a}\right\}$；

② 当 $a<0$ 时，其解集为 $\left\{x \middle| x<\frac{b}{a}\right\}$；

③ 当 $a=0$ 时，若 $b\geqslant 0$，其解集为空集；若 $b<0$，其解集为 $\mathbf{R}$.

(2) 关于 x 的一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$(或 <0，$\geqslant 0$，$\leqslant 0$) 的解法，其中设 $a>0$，记方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实根为 x_1，x_2，且 $x_1\leqslant x_2$.

类型 / 解集	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leqslant 0$
$\Delta>0$	$\{x \mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\{x \mid x\leqslant x_1$ 或 $x\geqslant x_2\}$	$\{x \mid x_1<x<x_2\}$	$\{x \mid x_1\leqslant x\leqslant x_2\}$
$\Delta=0$	$\left\{x \middle| x\neq -\frac{b}{2a}, x\in\mathbf{R}\right\}$	$\mathbf{R}$	$\varnothing$	$\left\{x \middle| x=-\frac{b}{2a}\right\}$
$\Delta<0$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\varnothing$	$\varnothing$

(3) 简单的一元高次不等式的解法.

常用方法是序轴标根法.具体地讲,(1) 将 $f(x)$ 在实数集内分解为一次因式的乘积,并使每一个因式中最高次项的系数为正;(2) 将每一个一次因式的根标在数轴上,从最大根的右上方依次通过每一点画曲线,并注意奇穿过偶弹回;(3) 根据曲线显现 $f(x)$ 的符号变化规律,写出不等式的解集.

3. 分式不等式的解法

分式不等式的一般解题思路是先移项使右边为0,再通分并将分子分母分解因式,并使每一个因式中最高次项的系数为正,最后用标根法求解.解分式不等式时,一般不能去分母,但分母恒为正或恒为负时可去分母.

将分式不等式化为高次不等式(组)求解,即设 $f(x)$,$g(x)$ 是关于 x 的多项式函数,则常用如下结论:

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0(<0)\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0(<0);$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0(\leqslant 0)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)\geqslant 0(\leqslant 0),\\g(x)\neq 0.\end{cases}$$

4. 无理不等式的解法

(1) $\sqrt{f(x)}<\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow 0\leqslant f(x)<g(x)$.

(2) $\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\g(x)\geqslant 0,\\f(x)<[g(x)]^2.\end{cases}$

(3) $\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\g(x)<0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\g(x)\geqslant 0,\\f(x)>[g(x)]^2.\end{cases}$

5. 含有绝对值的不等式的解法

常用方法:

(1) 分段讨论法(最后结果应取各段的并集);(2) 利用绝对值的定义;(3) 数形结合;(4) 两边平方.

常用结论:

(1) $|x|<c\Leftrightarrow\begin{cases}-c<x<c, & \text{当 } c>0 \text{ 时};\\\varnothing, & \text{当 } c\leqslant 0 \text{ 时}.\end{cases}$

(2) $|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$.

(3) $|x|>c\Leftrightarrow\begin{cases}x>c,\text{或 } x<-c, & \text{当 } c>0 \text{ 时};\\x\neq 0, & \text{当 } c=0 \text{ 时},\\\mathbf{R}, & \text{当 } c<0 \text{ 时}.\end{cases}$

(4) $|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$，或 $f(x)<-g(x)$.

(5) $|f(x)|>|g(x)|\Leftrightarrow[f(x)]^2>[g(x)]^2$

$$\Leftrightarrow[f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]>0.$$

6. 指数不等式和对数不等式的解法

(1) $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$(参数 $a>1$).

(2) $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$(参数 $0<a<1$).

(3) 上述同解变形是根据指数函数的单调性，即函数 $y=a^x$，当 $a>1$ 时，函数在 $x\in\mathbf{R}$ 上是增函数；当 $0<a<1$ 时，函数在 $x\in\mathbf{R}$ 上是减函数.

(4) $\log_a f(x)>\log_a g(x)$(参数 $a>1$)$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0,\\g(x)>0,\\f(x)>g(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)>0,\\f(x)>g(x).\end{cases}$

(5) $\log_a f(x)>\log_a g(x)$[参数 $a\in(0,1)$]$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)<g(x),\\f(x)>0.\end{cases}$

(6) 上述同解变形是根据对数函数的单调性，即函数 $y=\log_a x$，当 $a>1$ 时，函数在 $x>0$ 上是增函数；当 $0<a<1$ 时，函数在 $x>0$ 上是减函数.

7. 含参不等式的解法

求解的通法是"定义域为前提，函数增减性为基础，分类讨论是关键". 注意解完之后要写上："综上，原不等式的解集是……". 注意：按参数讨论，最后应按参数取值分别说明其解集；但若按未知数讨论，最后应求并集.

8. 不等式的恒成立，能成立，恰成立等问题

不等式恒成立问题的常规处理方式，常应用函数方程思想和"分离变量法"转化为最值问题，也可抓住所给不等式的结构特征，利用数形结合法.

(1) 恒成立问题

若不等式 $f(x)>A$ 在区间 D 上恒成立，则等价于在区间 D 上 $f(x)_{\min}>A$；

若不等式 $f(x)<B$ 在区间 D 上恒成立，则等价于在区间 D 上 $f(x)_{\max}<B$.

恒成立不等式问题的最值解法，在解决指定范围内不等式恒成立问题时，常用到下面的结论：

① 不等式 $f(x)\geqslant\lambda$ 对 $x\in\boldsymbol{D}$ 恒成立的充要条件是 $\lambda\leqslant\min\limits_{x\in D}f(x)$；

② 不等式 $f(x)\leqslant\lambda$ 对 $x\in\boldsymbol{D}$ 恒成立的充要条件是 $\lambda\geqslant\max\limits_{x\in D}f(x)$；

③ 若存在 $x_0\in D$ 使 $f(x_0)\geqslant\lambda$ 成立的充要条件是 $\lambda\leqslant\max\limits_{x\in D}f(x)$；

④ 若存在 $x_0\in\boldsymbol{D}$ 使 $f(x_0)\leqslant\lambda$ 成立的充要条件是 $\lambda\geqslant\min\limits_{x\in D}f(x)$.

以上结论，当最值不存在时，结论中的最小值换成下确界，最大值换成上确界.

(2) 能成立问题

若在区间 D 上存在实数 x 使不等式 $f(x)>A$ 成立，则等价于在区间 D 上 $f(x)_{\max}>A$；

若在区间 D 上存在实数 x 使不等式 $f(x)<B$ 成立，则等价于在区间 D 上 $f(x)_{min}<B$.

(3) 恰成立问题

若不等式 $f(x)>A$ 在区间 D 上恰成立，则等价于不等式 $f(x)>A$ 的解集为 D；

若不等式 $f(x)<B$ 在区间 D 上恰成立，则等价于不等式 $f(x)<B$ 的解集为 D.

不等式解集的端点值往往是不等式对应方程的根或不等式有意义范围的端点值.

例题精析

例 1　解不等式 $\lg\left(x-\frac{1}{x}\right)\leqslant 0$.

解　原不等式等价于 $0\leqslant\frac{x^2-1}{x}\leqslant 1\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{x}\left(\frac{x^2-1}{x}-1\right)\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{(x^2-1)(x^2-1-x)}{x^2}\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\(x+1)(x-1)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\leqslant 0\end{cases}$. 由序轴标根法(如图 2-1)，得所给不等式的解为 $-1\leqslant x\leqslant\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 或 $1\leqslant x\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

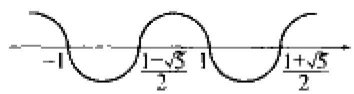


图 2-1

说明　求解过程中运用了如下结论：

$a<b$ 时，$a\leqslant f(x)\leqslant b\Leftrightarrow(f(x)-a)(f(x)-b)\leqslant 0$.

事实上，在二次不等式解的法则中，有 $(x-a)(x-b)\leqslant 0\Leftrightarrow a\leqslant x\leqslant b$，$(a<b)$，那么以 $f(x)$ 代换 x，就有 $(f(x)-a)(f(x)-b)\leqslant 0\Leftrightarrow a\leqslant f(x)\leqslant b$.

利用这一结论，可以将双链不等式转化为单向不等式. 解题中我们若能注意利用这种转化关系，不少有关双链不等式的问题将会出奇制胜地得到解决，从而可以避免解不等式组或分向证明等复杂的运算过程.

例 2　解不等式 $\frac{8}{(x+1)^3}+\frac{10}{x+1}-x^3-5x>0$.

解　直接解这个高次分式不等式一时不好下手，如果能注意到：

$$\frac{8}{(x+1)^3}+\frac{10}{x+1}=\left(\frac{2}{x+1}\right)^3+5\left(\frac{2}{x+1}\right),$$

则原不等式可化为：$\left(\frac{2}{x+1}\right)^3+5\left(\frac{2}{x+1}\right)>x^3+5x$.

由此，我们可构造函数 $f(t)=t^3+5t$，由于 $f(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调递增函数，而原不等式可化为：$f\left(\frac{2}{x+1}\right)>f(x)$，所以原不等式等价于：$\frac{2}{x+1}>x$，解之得原不等式的解为 $-1<x<1$

或 $x<-2$.

例 3 (2006 年上海卷理科)三个同学对问题"关于 x 的不等式 $x^2+25+|x^3-5x^2|\geqslant ax$ 在[1, 12]上恒成立,求实数 a 的取值范围"提出各自的解题思路.

甲说:"只须不等式左边的最小值不小于右边的最大值".

乙说:"把不等式变形为左边含变量 x 的函数,右边仅含常数,求函数的最值".

丙说:"把不等式两边看成关于 x 的函数,作出函数图象".

参考上述解题思路,你认为他们所讨论的问题的正确结论,即 a 的取值范围是________.

分析 本题是一道含参数的不等式恒成立的范围问题,命题者化难为易,创设情景提供三位同学解决此问题的解题思路,考查收集信息,分析问题,处理信息的实践操作能力.

解 将原不等式变形为:

$|x^3-5x^2|\geqslant -x^2+ax-25$ 在[1, 12]上恒成立,求实数 a 的取值范围.

运用甲同学提供的思路左边函数 $|x^3-5x^2|$ 在[1, 12]上的最小值不小于零,因此,只需右边的函数 $-x^2+ax-25$ 在[1, 12]上的最大值不大于零即可.即 $-x^2+ax-25\leqslant 0$ 在[1, 12]上恒成立.

运用同学乙的思路将上述命题变形为:$x+\dfrac{25}{x}\geqslant a$ 在[1, 12]上恒成立.

然后运用同学丙的思路,画出函数 $f(x)=x+\dfrac{25}{x}$ 在[1, 12]的图象(从略),易知函数 $f(x)=x+\dfrac{25}{x}$ 在[1, 5]上单调递减,在[5, 12]上单调递增,因此 $f(x)_{min}=f(5)=10$,故 $a\leqslant 10$,即 $a\in(-\infty, 10]$.

说明 利用分离参数法也可直接求解.

将原不等式变形为

$$x+\frac{25}{x}+|x^2-5x|\geqslant a. \qquad ①$$

令 $f(x)=x+\dfrac{25}{x}+|x^2-5x|$,由于 $x\in[1, 12]$,$x+\dfrac{25}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{25}{x}}=10$,

$x=5$ 时取等号.

$|x^2-5x|\geqslant 0$,$x=5$ 或 0 时取等号.

所以 $f(x)\geqslant 10+0=10$,当且仅当 $x=5$ 时取等号.故 $f(x)_{min}=10$.结合①式知 $a\leqslant 10$,即 $a\in(-\infty, 10]$.

例 4 已知 $a\in(0, 1)$,试确定实数 t 的取值范围,使不等式 $ax^2+ty^2\geqslant(ax+ty)^2$ 对任意实数 x, y 都成立.

解 此题中字母 a 是常数,参数为 t,而 x, y 可看成变量,因其地位均等,故将 x 或 y 作主元都行,比如视不等式为关于 x 的不等式,则有

$$ax^2+ty^2 \geqslant a^2x^2+2atxy+t^2y^2,$$

即$(a^2-a)x^2+2atyx+y^2(t^2-t)\leqslant 0$.

因为$a\in(0,1)$，所以$a^2-a=a(a-1)<0$.

所以二次函数$f(x)=(a^2-a)x^2+2atyx+y^2(t^2-t)$的图象开口向下，则要使$f(x)\leqslant 0$对$x\in \mathbf{R}$恒成立，只须

$$\Delta=(2aty)^2-4(a^2-a)y^2(t^2-t)\leqslant 0$$
$$\Rightarrow a^2t^2-(a^2-a)(t^2-t)\leqslant 0$$
$$\Rightarrow t^2-(1-a)t\leqslant 0\Rightarrow t[t-(1-a)]\leqslant 0,$$

则由$a\in(0,1)$得$0\leqslant t\leqslant 1-a$. 故使不等式$ax^2+ty^2\geqslant(ax+ty)^2$对任意实数$x$，$y$都成立的$t$的取值范围是$[0,1-a]$.

例 5 解不等式$\sqrt{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{|x|+|y|}{\pi}}+\tan^2x+1\leqslant\sqrt{2}|\tan x|(\sin x+\cos x)$.

解 因为$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$，及$\sqrt{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{|x|+|y|}{\pi}}\geqslant 0$，所以，由题设有$\tan^2x+1\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{|x|+|y|}{\pi}}+\tan^2x+1\leqslant\sqrt{2}|\tan x|(\sin x+\cos x)\leqslant 2|\tan x|$.

但是$(|\tan x|-1)^2\geqslant 0$，即$\tan^2x+1\geqslant 2|\tan x|$，于是上面的不等式都取等号，即

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{|x|+|y|}{\pi}}=0,\ \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2},\ |\tan x|=1.$$

于是得$|x|+|y|=\pi$，及$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

因为$|x|\leqslant\pi$，即$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$，故$k=0$，从而$x=\frac{\pi}{4}$，$y=\pm\frac{3}{4}\pi$. 因此，原不等式的解为$(x,y)=\left(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right)$或$\left(\frac{\pi}{4},-\frac{3}{4}\pi\right)$.

例 6 设函数$f(x)=\frac{(k+1)x^2+(k+3)x+(2k-8)}{(2k-1)x^2+(k+1)x+(k-4)}$的定义域用$D$表示，则使$f(x)>0$，对于任意$x\in D$均成立的实数$k$的集合是什么?

解 若$k+1=0$，即$k=-1$时，$f(x)=\frac{10-2x}{3x^2+5}$，易知$D=\mathbf{R}$. 但当$x>5$时，$f(x)<0$，所以$k=-1$不符合条件.

若$(k+1)x^2+(k+3)x+(2k-8)=0$有两根x_1、x_2，如果$f(x)>0$对$x\in D$均成立，则x_1、x_2一定是$(2k-1)x^2+(k+1)x+(k-4)=0$的根. 于是有

$$\begin{cases}\dfrac{k+1}{2k-1}>0,\\ x_1+x_2=-\dfrac{k+3}{k+1}=-\dfrac{k+1}{2k-1},\Rightarrow k=1.\\ x_1x_2=\dfrac{2k-8}{k+1}=\dfrac{k-4}{2k-1},\\ \Delta=(k+3)^2-4(k+1)(2k-8)\geqslant 0,\end{cases}$$

事实上，当 $k=1$ 时，$f(x)=2>0$，其中 $D=(-\infty,-3)\cup(-3,1)\cup(1,+\infty)$.

若 $(k+1)x^2+(k+3)x+(2k-8)=0$ 无实根，则题意的等价条件为

$$\begin{cases}\dfrac{k+1}{2k-1}>0,\\ \Delta_1=(k+3)^2-4(k+1)(2k-8)<0,\\ \Delta_2=(k+1)^2-4(2k-1)(k-4)\leqslant 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k>\dfrac{1}{2}\text{ 或 }k<-1,\\ k>\dfrac{15+16\sqrt{2}}{7}\text{ 或 }k<\dfrac{15-16\sqrt{2}}{7},\\ k\geqslant 5\text{ 或 }k\leqslant\dfrac{3}{7}.\end{cases}\Rightarrow k>\dfrac{15+16\sqrt{2}}{7}\text{ 或 }k<\dfrac{15-16\sqrt{2}}{7}.$$

所以 k 的取值集合是 $\left\{k\,\middle|\,k=1\text{ 或 }k>\dfrac{15+16\sqrt{2}}{7}\text{ 或 }k<\dfrac{15-16\sqrt{2}}{7}\right\}$.

例 7 （2006 年浙江省高中数学夏令营试题）如果关于 x 的不等式

$$ax^2-|x+1|+2a<0$$

的解集为空集，则 a 的取值范围是________.

解 由题意知，对一切实数 x，都有 $ax^2-|x+1|+2a\geqslant 0$，

即 $a\geqslant f(x)=\dfrac{|x+1|}{x^2+2}$.

故 $a\geqslant \max f(x)$.

令 $t=x+1$，则 $f(x)=\dfrac{|t|}{(t-1)^2+2}=\dfrac{|t|}{t^2-2t+3}$.

(1) 当 $x\geqslant -1$，即 $t\geqslant 0$ 时，有 $f(x)=\dfrac{t}{t^2-2t+3}\leqslant\dfrac{t}{2\sqrt{3}t-2t}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$.

当且仅当 $t=\sqrt{3}$，即 $x=\sqrt{3}-1$ 时，等号成立.

(2) 当 $x<-1$，即 $t<0$ 时，有 $f(x)=\dfrac{-t}{t^2-2t+3}\leqslant\dfrac{-t}{-2\sqrt{3}t-2t}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$.

当且仅当 $t=-\sqrt{3}$，即 $x=-\sqrt{3}-1$ 时，等号成立.

综上，$\max\limits_{x\in\mathbf{R}} f(x)=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$.

故 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{\sqrt{3}+1}{4},+\infty\right)$.

说明 (1) 不等式恒成立中参数范围问题是近年高考和高中数学竞赛的热点问题，解这类问题的一般方法是最值法、分离参数法与数形结合法，不等式的解集为空集（无解）与不等式的解集不是空集（有解）均可转化为不等式恒成立问题来处理.

(2) 不等式 $f(x)>a$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow f(x)_{\min}>a$；$f(x)<a$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow f(x)_{\max}<a$.

(3) $f(x)>a$ 的解集为空集 $\Leftrightarrow f(x)\leqslant a$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max}\leqslant a$；$f(x)<a$ 的解集为空集 $\Leftrightarrow f(x)\geqslant a$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min}\geqslant a$.

(4) $f(x)>a$ 的解集不是空集 $\Leftrightarrow f(x)_{\max}>a$；$f(x)<a$ 的解集不是空集 $\Leftrightarrow f(x)_{\min}<a$.

设 a，b，c 是常数，若 $x\in[a,b]$，$f(x)\in[m,n]$，$g(x)\in[p,q]$，则

当 $m>c$ 时，不等式 $f(x)>c$ 的解集是 $[a,b]$，$f(x)\leqslant c$ 的解集是 $\varnothing$；

当 $n<c$ 时，不等式 $f(x)\geqslant c$ 的解集是 $\varnothing$，$f(x)<c$ 的解集是 $[a,b]$；

当 $n>p$ 时，不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集是 $\varnothing$，$f(x)<g(x)$ 的解集是 $[a,b]$；

当 $m>q$ 时，不等式 $f(x)>g(x)$ 的解集是 $[a,b]$，$f(x)\leqslant g(x)$ 的解集是 $\varnothing$.

例 8 （首届中国东南地区数学奥林匹克试题）已知不等式

$$\sqrt{2}(2a-3)\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{6}{\sin\theta+\cos\theta}-2\sin 2\theta<3a+6$$

对于 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解 设 $\sin\theta+\cos\theta=x$，则 $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，$\sin 2\theta=x^2-1$，$x\in[1,\sqrt{2}]$.

从而，原不等式可化为 $(2a+3)x+\dfrac{6}{x}-2(x^2-1)<3a-6$.

即 $2x^2-2ax-3x-\dfrac{6}{x}+3a+4>0$.

整理得 $(2x-3)\left(x+\dfrac{2}{x}-a\right)>0\ (x\in[1,\sqrt{2}])$. ①

因为 $x\in[1,\sqrt{2}]$，所以 $2x-3<0$.

不等式 ① 恒成立等价于 $x+\dfrac{2}{x}-a<0\ (x\in[1,\sqrt{2}])$ 恒成立.

从而，只要 $a>\left(x+\dfrac{2}{x}\right)_{\max}\ (x\in[1,\sqrt{2}])$.

又易知 $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$ 在 $[1,\sqrt{2}]$ 上递减，则 $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)_{\max}=3\ (x\in[1,\sqrt{2}])$.

所以，$a > 3$.

例 9 （第 17 届“希望杯”试题）已知函数

$$y = f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} - \sqrt{1 + x}.$$

(1) 求 y 的定义域和值域，并证明 y 是单调递减函数；

(2) 解不等式 $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} - \sqrt{1 + x} > \dfrac{1}{2}$.

解 (1) 由 $\begin{cases} 1 - x^2 \geqslant 0, \\ 1 + x \geqslant 0, \end{cases}$ 解得 $-1 \leqslant x \leqslant 1$,

所以函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$.

因为函数 $y = f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递减（待证），

所以 $y = f(x)$ 的值域为 $[f(1), f(-1)]$，即 $[1 - \sqrt{2}, 1]$.

以下证明 $y = f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递减.

当 $x \in [-1, 1]$ 时，

设 $x = \sin\theta$, $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$，$\sin\theta$ 单调递增，又 $\dfrac{\theta}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$,

所以

$$y = \sqrt{1 + \cos\theta} - \sqrt{1 + \sin\theta} = \sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2} - \left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= (\sqrt{2} - 1)\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right),$$

其中 $\varphi = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} = \arctan(\sqrt{2} + 1)$.

由于 $\varphi \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\dfrac{\theta}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$,

所以 $\dfrac{\theta}{2} + \varphi \in \left(0, \dfrac{3\pi}{4}\right) \subset [0, \pi]$.

显然 $y = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}\cos\left(\dfrac{\theta}{2} - \varphi\right)$ 是关于 θ 的单调递减函数，由复合函数的单调性（增函数与减函数复合）知 $y = f(x)$ 是 $[-1, 1]$ 上的单调递减函数.

(2) 设 $f(x_0) = \dfrac{1}{2}$,

又函数 $y = f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 是单调递减函数，

所以不等式 $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} - \sqrt{1 + x} > \dfrac{1}{2}$ 的解集为 $-1 \leqslant x < x_0$.

因为 $x = 0$ 时，$y = \sqrt{2} - 1 < \dfrac{1}{2}$，所以 $x_0 \in [-1, 0)$.

令 $x_0 = \sin\theta$, $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, $\sqrt{1 + \cos\theta} - \sqrt{1 + \sin\theta} = \dfrac{1}{2}$,

两边平方有 $2+\cos\theta+\sin\theta-2\sqrt{(1+\cos\theta)(1+\sin\theta)}=\frac{1}{4}$，

令 $\sin\theta+\cos\theta=t\left(\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\right)$，则 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}(t^2-1)$，$t\in[-1,1)$，

$2+t-2\sqrt{1+t+\frac{1}{2}(t^2-1)}=\frac{1}{4}$，

$t^2+\frac{7}{2}t+\frac{49}{16}=4\left[1+t+\frac{1}{2}(t^2-1)\right]$，

$t^2+\frac{t}{2}-\frac{17}{16}=0$，

解得 $t=\dfrac{-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{17}{4}}}{2}=\dfrac{-1\pm3\sqrt{2}}{4}$.

因为 $t\geqslant-1$，舍去 $t=\dfrac{-1-3\sqrt{2}}{4}$.

由 $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{4},\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta<0,\end{cases}$

解得 $x_1=\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{2}-1-\sqrt{13+6\sqrt{2}}}{8}$.

原不等式解集为 $\left[-1,\dfrac{3\sqrt{2}-1-\sqrt{13+6\sqrt{2}}}{8}\right)$.

例 10 （1998 年全国高中数学联赛试题）设函数 $f(x)=ax^2+8x+3(a<0)$. 对于给定的负数 a，有一个最大的正数 $L(a)$，使得在整个区间 $[0,L(a)]$ 上，不等式 $|f(x)|\leqslant5$ 都成立. 问 a 为何值时 $L(a)$ 最大?求出这个最大的 $L(a)$，并证明你的结论.

解 本题如果用纯粹的代数方法求解，则很难说清楚."对于给定的负数 a，有一个关于 a 的函数 $L(a)>0$，使得在整个区间 $[0,L(a)]$ 上，$|f(x)|\leqslant5$ 都成立."

下面用数形结合的思想，建构一个新的解题意境.

$$f(x)=ax^2+8x+3=a\left(x+\frac{4}{a}\right)^2+3-\frac{16}{a}.$$

因为 $a<0$，所以 $-\frac{4}{a}>0$，$f(x)_{max}=3-\frac{16}{a}>0$，$x\in\mathbf{R}$.

所以抛物线 $y=f(x)$ 的顶点在第一象限.

又 $\Delta=64-12a>0$，所以方程 $ax^2+8x+3=0$ 有一正根和一负根，即抛物线与 x 轴的两个交点应在 y 轴两侧.

(1) 当 $3-\frac{16}{a}>5$，即 $-8<a<0$ 时，由图2-2知，此时应有 $0<L(a)<-\frac{4}{a}$.

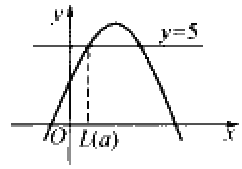


图 2-2

要使 $x\in[0,L(a)]$ 时，不等式 $|f(x)|\leqslant 5$ 都成立，

$L(a)$ 应是方程 $ax^2+8x+3=5$ 的较小根，解这个方程，得

$$L(a)=\frac{-8+\sqrt{64+8a}}{2a}=\frac{2}{\sqrt{16+2a}+4}.$$

因为 $\sqrt{16+2a}>0$，所以 $L(a)<\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

(2) 当 $3-\frac{16}{a}\leqslant 5$，即 $a\leqslant -8$ 时，由图2-3知，此时应有 $L(a)>-\frac{4}{a}$，则 $L(a)$ 是方程 $ax^2+8x+3=-5$ 的较大根，解这个方程，得

$$L(a)=\frac{-8-\sqrt{64-32a}}{2a}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{4-2a}-2}\leqslant\frac{4}{\sqrt{20}-2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

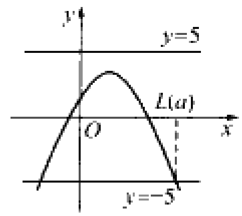


图 2-3

当且仅当 $a=-8$ 时，上式等号成立.

因为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}>\frac{1}{2}$，所以当且仅当 $a=-8$ 时，$L(a)_{\max}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

说明　本题的关键是利用函数的图象将 $L(a)$ 表示为 a 的函数，再求函数 $L(a)$ 的最大值.

例11　已知函数 $y=f(x)$ 的图象为圆心在原点的两段圆弧，如图2-4.

试解不等式 $f(x)>f(-x)+x$.

解法一　先求出 $f(x)$ 的解析式，再求解.

由图象易得 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2},(0<x\leqslant 1),\\-\sqrt{1-x^2},(-1\leqslant x<0)\end{cases}$

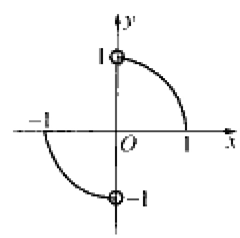


图 2-4

当 $x\in(0,1]$ 时，由 $f(x)>f(-x)+x$，得

$\sqrt{1-x^2}>-\sqrt{1-(-x)^2}+x$，

即 $2\sqrt{1-x^2}>x$，解此无理不等式，得 $0<x<\frac{2\sqrt{5}}{5}$；

当 $x\in[-1,0)$ 时，$f(x)>f(-x)+x\Leftrightarrow-\sqrt{1-x^2}>\sqrt{1-(-x)^2}+x\Rightarrow -1\leqslant x<-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

综上，原不等式的解集为 $\left[-1,-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\cup\left(0,\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

解法二　题目已给出了函数的图象，从图象的观察知，$f(x)$ 为奇函数，由这一性质的发现，可考虑用数形结合(当然在解法一求解时亦可用)，因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)>f(-x)+x \Leftrightarrow f(x)>\frac{x}{2}$，而方程 $f(x)=\frac{x}{2}$ 的解为 $x=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$(交点横坐标由方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ y=\frac{x}{2}\end{cases}$ 求得)。

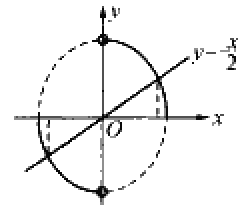


图 2－5

由图 2－5 易知，原不等式的解集为 $\left[-1,-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\cup\left(0,\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$。

例 12　(*第 17 届全国"希望杯"竞赛题*)解关于 x 的不等式 $|\log_a x|+|\log_a^2 x-1|>a(a>1)$。

解　设 $\log_a x=t$，则 $|t|+|t^2-1|>a(a>1)$。

令 $y_1=|t^2-1|$，$y_2=a-|t|$。

原不等式转化成　$y_1>y_2$。

画图于坐标系 tOy 上，整体问题局部化：

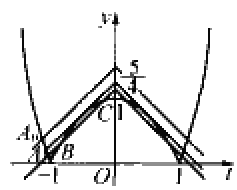


图 2－6

当 $-1<t<0$ 时，

$y_1=1-t^2$，$y_2=a+t$，$y_1(t)$ 与 $y_2(t)$ 图象相切，即方程组 $\begin{cases}y_1=1-t^2,\\ y_2=a+t\end{cases}$ 有唯一解，此时，由 $\Delta=0$，解得 $a=\frac{5}{4}$。

以下根据图象讨论，由偶函数对称性，仅需关注左侧。

(1) 当 $1<a<\frac{5}{4}$ 时，若 $t<-1$，$y_1=t^2-1$，$y_2=a+t$，

由 $y_1=y_2$，得 $t_A=\frac{1-\sqrt{5+4a}}{2}$。

若 $-1\leqslant t<0$，$y_1=1-t^2$，$y_2=a+t$，由 $y_1=y_2$，得

$$t_B=\frac{-1-\sqrt{5-4a}}{2},\ t_C=\frac{-1+\sqrt{5-4a}}{2}.$$

由图象知，此时 $t\in\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{5+4a}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1-\sqrt{5-4a}}{2},\frac{-1+\sqrt{5-4a}}{2}\right)$。

(2) 当 $a\geqslant\frac{5}{4}$ 时，若 $t<-1$(受限于 a 的范围，无须考虑 $-1\leqslant t<0$)。

由 $y_1=y_2$，解得　$t_1=\frac{1-\sqrt{5+4a}}{2}$，

由图象知，此时 $t\in\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{5-4a}}{2}\right)$，考虑到偶函数的对称性，并换元解得：

当 $1<a<\frac{5}{4}$ 时，

$x\in\left(0,a^{\frac{1-\sqrt{5+4a}}{2}}\right)\cup\left(a^{\frac{-1-\sqrt{5-4a}}{2}},a^{\frac{-1+\sqrt{5-4a}}{2}}\right)\cup\left(a^{\frac{1-\sqrt{5-4a}}{2}},a^{\frac{1+\sqrt{5-4a}}{2}}\right)\cup\left(a^{\frac{1+\sqrt{5+4a}}{2}},+\infty\right)$.

当 $a\geqslant\frac{5}{4}$ 时，

$x\in\left(0,a^{\frac{1-\sqrt{5+4a}}{2}}\right)\cup\left(a^{\frac{-1-\sqrt{5+4a}}{2}},+\infty\right)$.

例 13 设 a、b、c 均为正数，且 $a+b+c=\lambda$，若不等式 $\frac{1}{a(1+\lambda b)}+\frac{1}{b(1+\lambda c)}+\frac{1}{c(1+\lambda a)}\geqslant\frac{27}{4}$ 恒成立，求 λ 的取值范围.

解 构造向量 $\boldsymbol{a}=\left(\sqrt{\frac{1}{a(1+\lambda b)}},\sqrt{\frac{1}{b(1+\lambda c)}},\sqrt{\frac{1}{c(1+\lambda a)}}\right)$,

$$\boldsymbol{b}=\left(\sqrt{a(1+\lambda b)},\sqrt{b(1+\lambda c)},\sqrt{c(1+\lambda a)}\right).$$

则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$,

$$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\frac{1}{a(1+\lambda b)}+\frac{1}{b(1+\lambda c)}+\frac{1}{c(1+\lambda a)}}\cdot\sqrt{(a+b+c)+\lambda(ab+bc+ca)}.$$

由 $\lambda^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\geqslant3(ab+bc+ca)$,

得 $ab+bc+ca\leqslant\frac{\lambda^2}{3}$,

$$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\leqslant\sqrt{\frac{1}{a(1+\lambda b)}+\frac{1}{b(1+\lambda c)}+\frac{1}{c(1+\lambda a)}}\cdot\sqrt{\lambda+\frac{1}{3}\lambda^2},$$

即 $\quad\frac{1}{a(1+\lambda b)}+\frac{1}{b(1+\lambda c)}+\frac{1}{c(1+\lambda a)}\geqslant\frac{27}{3\lambda+\lambda^2}$.

等号当且仅当 $a=b=c$ 且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 同向，即 $a=b=c=\frac{\lambda}{3}$ 时成立.

故已知不等式恒成立 $\Leftrightarrow\frac{27}{3\lambda+\lambda^2}\geqslant\frac{27}{4}(\lambda>0)\Leftrightarrow(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+4)\leqslant0(\lambda>0)\Leftrightarrow0<\lambda\leqslant1$.

所以 λ 的取值范围为区间 $(0,1]$.

例 14 （2004 西部数学奥林匹克试题）求所有的实数 k，使得不等式 $a^3+b^3+c^3+d^3+1\geqslant k(a+b+c+d)$ 对任意 $a,b,c,d\in[-1,+\infty)$ 都成立.

证明 当 $a=b=c=d=-1$ 时，有 $-3\geqslant k\cdot(-4)$，所以 $k\geqslant\frac{3}{4}$.

当 $\quad a=b=c=d=\frac{1}{2}$ 时，有 $4\cdot\frac{1}{8}+1\geqslant k\cdot\left(4\cdot\frac{1}{2}\right)$，所以 $k\leqslant\frac{3}{4}$.

故 $\quad k=\frac{3}{4}$.

下面证明不等式 $a^3+b^3+c^3+d^3+1\geqslant\frac{3}{4}(a+b+c+d)$. ①

对任意 $a, b, c, d \in [-1, +\infty)$ 都成立.

首先证明 $4x^3+1 \geqslant 3x, x \in [-1, +\infty)$.

事实上,由 $(x+1)(2x-1)^2 \geqslant 0$,便得 $4x^3+1 \geqslant 3x, x \in [-1, +\infty)$.

所以 $4a^3+1 \geqslant 3a, 4b^3+1 \geqslant 3b, 4c^3+1 \geqslant 3c, 4d^3+1 \geqslant 3d$,将这四个不等式相加,便得欲证的不等式(1).

所以,欲求的实数 $k = \frac{3}{4}$.

说明 这里先采用特殊化的方法,确定欲求实数 k 的具体值,再"化求为证",将问题转化为不等式的证明问题.

例 15 (第 16 届爱尔兰数学奥林匹克试题)设 $a, b>0$,求最大的正数 c,使得对任意正实数 x,均有 $c \leqslant \max\left\{ax+\frac{1}{ax}, bx+\frac{1}{bx}\right\}$.

解 设 $f(t) = t+\frac{1}{t}, t>0, g(x) = \max(f(ax), f(bx))$,转为求 $g(x)$ 在 $x>0$ 时的最小值.

若 $a=b$,则 $g(x) = ax+\frac{1}{ax} \geqslant 2$,等号当 $x=\frac{1}{a}$ 时取到,此时,所求 $c=2$.

若 $a \neq b$,不妨设 $0<a<b$,则

$$f(bx)-f(ax) = bx-ax+\frac{1}{bx}-\frac{1}{ax} = (b-a)x\left(1-\frac{1}{abx^2}\right).$$

$$\text{所以}, g(x) = \begin{cases} f(bx), \text{若 } x \geqslant \frac{1}{\sqrt{ab}}; \\ f(ax), \text{若 } 0<x \leqslant \frac{1}{\sqrt{ab}}. \end{cases}$$

利用 $f(t)=t+\frac{1}{t}$ 的单调区间,知在 $1 \leqslant s<t$ 时,$f(s)<f(t)$;$0<s<t \leqslant 1$ 时,$f(s)>f(t)$.

因此,当 $x \geqslant \frac{1}{\sqrt{ab}}$ 时,$f(bx) \geqslant f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$;

当 $0<x \leqslant \frac{1}{\sqrt{ab}}$ 时,亦有 $f(bx) \geqslant f\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$. 故 $g(x) \geqslant f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$. 所以 $c = f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = \sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}$. 等号在 $x=\frac{1}{\sqrt{ab}}$ 时取到.

综上,最大的 $c = \sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}$.

例 16 (第 29 届 IMO 试题)求证:不等式 $\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}$ 的解集是互不相交的区间的交

集，且区间的长度之和为 1988.

分析与证明 不等式左边含有 70 个项，不宜一开始就对一般的问题进行讨论. 先减少项数，退到一般的情形.

不等式① $\dfrac{1}{x-1}\geqslant\dfrac{5}{4}$.

不等式② $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}\geqslant\dfrac{5}{4}$.

以上两个不等式都相当容易求解，但求解的方法应适合一般情况，从而应选用适当的方法(便于推广的方法). 显然，代数方法不能适应一般情况. 由此想到利用几何方法求解.

对于不等式①，令 $y_1=\dfrac{1}{x-1}$，则 $y_1\geqslant\dfrac{5}{4}$ 的解如图 2-7 所示.（注：作图步骤：先确定间断点，再考察函数在间断点附近的变化趋势，比如 $x\to1^-$ 时，$y\to-\infty$，$x\to1^+$ 时，$y\to+\infty$）

对于不等式②，令 $y_2=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}$，则 $y_2\geqslant\dfrac{5}{4}$ 的解如图 2-8 所示.

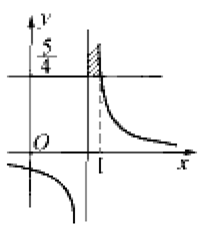


图 2-7

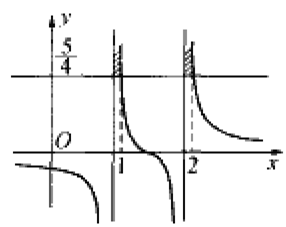


图 2-8

由此发现，$y_{70}\geqslant\dfrac{5}{4}$ 的解如图 2-9 所示.

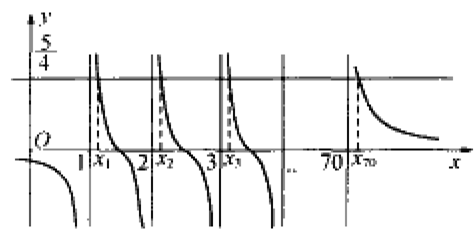


图 2-9

设不等式的解为 $(1,x_1]\cup(2,x_2]\cup\cdots\cup(70,x_{70}]$.

下证 $\sum\limits_{i=1}^{70}(x_i-i)=1988$，即 $\sum\limits_{i=1}^{70}x_i=1+2+3+\cdots+70+1988=4473$.

由上式，自然想到韦达定理，这只需 x_i 是一个整式方程的 70 个根. 为此将原方程化为整式方程：

$$\prod_{i\neq1}(x-i)+2\prod_{i\neq2}(x-i)+\cdots+70\prod_{i\neq70}(x-i)-\frac{5}{4}\prod_{i=1}^{70}(x-i)=0.$$

上述方程中，x^{70} 的系数为 $a_{70}=-\dfrac{5}{4}$，x^{69} 的系数为

$$a_{69}=1+2+3+\cdots+70-\frac{5}{4}(-1-2-\cdots-70)=\frac{9}{4}(1+2+\cdots+70),$$

所以，$x_1+x_2+\cdots+x_{70}=-\frac{a_{69}}{a_{70}}=\frac{9}{5}(1+2+\cdots+70)=1+2+\cdots+70+1988=4473.$

思考交流

思考题1 设$\frac{a_1}{b_1}$、$\frac{a_2}{b_2}$为最简真分数，且$a_2b_1-a_1b_2=1$，则满足$\frac{a_1}{b_1}<\frac{k}{n}<\frac{a_2}{b_2}$的最小正整数为

$$n=b_1+b_2,\ k=a_1+a_2. \quad ①$$

证明 由$\frac{a_1}{b_1}<\frac{k}{n}<\frac{a_2}{b_2}$，有$b_1k>a_1n$，$a_2n>b_2k$.

故存在正整数A、B，使得$\begin{cases}b_1k-a_1n=A,\\a_2n-b_2k=B.\end{cases}$

解方程组，得$\begin{cases}n=\dfrac{b_1B+b_2A}{a_2b_2-a_1b_2}=b_1B+b_2A(a_2b_1-a_1b_2=1),\\k=\dfrac{a_1B+a_2A}{a_2b_1-a_1b_2}=a_1B+a_2A.\end{cases}$

当A、B同时取最小值1时，n、k也取得最小值$n=b_1+b_2$，$k=a_1+a_2$.

说明 ①给出的是n、k的最小正整数解的表达式，我们自然会想到：是否有正整数k使n取最大值？经研究，有如下结果：

设$\frac{a_1}{b_1}$、$\frac{a_2}{b_2}$为最简真分数，且$a_2b_1-a_1b_2=1$，则满足$\frac{a_1}{b_1}<\frac{k}{n}<\frac{a_2}{b_2}$有唯一的正整数$k$使$n$取最大值时，必有$n=2b_1b_2$，$k=a_1b_2+a_2b_1$.

证明 由上知，满足$\frac{a_1}{b_1}<\frac{k}{n}<\frac{a_2}{b_2}$的$n$、$k$为①. 为使$k$取唯一值，且$n$尽可能大，我们将上式变为$\frac{a_1b_2}{b_1b_2}<\frac{a_1B+a_2A}{b_1B+b_2A}<\frac{a_2b_1}{b_1b_2}$.

由于$a_2b_1-a_1b_2=1$，再将上式变为$\frac{2a_1b_2}{2b_1b_2}<\frac{a_1B+a_2A}{b_1B+b_2A}<\frac{2a_2b_1}{2b_1b_2}$，

此时，k取唯一的值$k=a_1B+a_2A=2a_1b_2+1=2a_2b_1-1$.

把$a_2b_1=a_1b_2+1$代入上式，有

$$k=a_1B+a_2A=2a_1b_2+1=a_1b_2+(a_1b_2+1)=a_1b_2+a_2b_1.$$

即取$B=b_2$，$A=b_1$，代入①得$n=b_1B+b_2A=2b_1b_2$.

当n再增大时，k已不唯一了. 故此时的n为最大值.

思考题 2 （第 40 届 IMO 试题）设 n 是一个固定的整数，$n \geqslant 2$.

a) 确定最小的常数 c，使得不等式 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j(x_i^2+x_j^2) \leqslant c\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^4$ ①

对所有的非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0$ 都成立；

b) 对于这个常数 c，确定等号成立的充要条件.

本讲给出一种简捷的解法. 符号 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} f(x_i, x_j)$ 表示对所有下标满足 $1 \leqslant i < j \leqslant n$ 的项 $f(x_i, x_j)$ 求和，以下简记为 $\sum f(x_i, x_j)$.

解 a) 当非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全为 0 时，记

$$x = \frac{\sum x_i x_j}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2},\ y = \frac{\sum x_i x_j x_k(x_i - x_j + x_k)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^4}.$$

因为 $\sum x_i x_j(x_i^2+x_j^2) = \sum x_i x_j\left[\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - 2\sum x_i x_j - \sum\limits_{\substack{k=1\\(k\neq i,j)}}^{n} x_k(x_i+x_j+x_k)\right]$

$$= \sum x_i x_j\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - 2\left(\sum x_i x_j\right)^2 - \sum x_i x_j x_k(x_i+x_j+x_k),$$

所以式 ①$\Leftrightarrow c \geqslant -2x^2 + x - y$.

因为 $-2x^2 + x - y \leqslant \frac{1}{8}$，其等号成立的充分必要条件是 $x = \frac{1}{4}$ 且 $y = 0$，

所以 $c \geqslant \frac{1}{8}$，$c_{\min} = \frac{1}{8}$，当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 时也适合.

b) 当 $c = \frac{1}{8}$ 时，$x = \frac{1}{4}$ 且 $y = 0$ 的充分必要条件是

$\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 4\sum x_i x_j$ 且 $\sum x_i x_j x_k(x_i + x_j + x_k) = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 2\sum x_i x_j$ 且 $\sum x_i x_j x_k = 0$.

因为 $\sum x_i x_j x_k = 0 \Leftrightarrow x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中任意 3 项之积为 0，即其中最多有两项 x_i、x_j 不为 0，此时 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 2\sum x_i x_j \Leftrightarrow x_i^2 + x_j^2 = 2x_i x_j \Leftrightarrow x_i = x_j$.

因此，$x = \frac{1}{4}$ 且 $y = 0$ 的充分必要条件是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中有两项相等（可以为 0），其余全为 0.

同步检测 2

1. （2004 年全国高中数学联赛四川省初赛试题）已知不等式 $m^2 + (\cos^2\theta - 5)m + 4\sin^2\theta \geqslant 0$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是 （　　）

A. $0\leqslant m\leqslant 4$　　B. $1\leqslant m\leqslant 4$

C. $m\geqslant 4$ 或 $m\leqslant 0$　　D. $m\geqslant 1$ 或 $m\leqslant 0$

2. (2003 年上海市高考试题)设 a_1、b_1、c_1、a_2、b_2、c_2 均为非零实数,不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 和 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集分别为集合 M 和 N,那么"$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$"是"$M=N$"的 (　　)

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

3. (2005 年全国高中数学联赛试题)使关于 x 的不等式 $\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}\geqslant k$ 有解的实数 k 的最大值是 (　　)

A. $\sqrt{6}-\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{6}+\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

4. (2006 年全国高中数学联赛陕西省预赛试题)若 $\sin^3\theta-\cos^3\theta\geqslant\cos\theta-\sin\theta$, $0\leqslant\theta<2\pi$,则角 θ 的取值范围是 (　　)

A. $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$　　C. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$　　D. $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

5. (2004 年全国高中数学联赛试题)不等式 $\sqrt{\log_2 x-1}+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x^3+2>0$ 的解集是 (　　)

A. $[2,3]$　　B. $(2,3)$　　C. $[2,4)$　　D. $(2,4)$

6. (第十四届"希望杯"高一第 2 试试题)关于 x 的不等式 $\lg^2x-(2+m)\lg x+m-1>0$ 对于 $|m|\leqslant 1$ 恒成立,则 x 的取值范围是 (　　)

A. $(0,1)\cup(10^3,+\infty)$　　B. $\left(0,\frac{1}{10}\right)\cup(10^2,+\infty)$

C. $\left(0,\frac{1}{10}\right)\cup(10^3,+\infty)$　　D. $(0,10^2)\cup(10^3,+\infty)$

7. (2005 年全国高中数学联合竞赛四川初赛试题)设 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$,则满足不等式 $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)>\cos x$ 的 x 的取值范围是________.

8. (2005 年全国高中数学联赛江西省预赛)若对所有正数 x, y,不等式 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}$ 都成立,则 a 的最小值是________.

9. (2000 年全国高中数学联赛试题)使不等式 $\sin^2x+a\cos x+a^2\geqslant 1+\cos x$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立的负数 a 的取值范围是________.

10. (2006 年全国高中数学联赛浙江省预赛试题) $\max\limits_{a,b,c\in\mathbf{R}^+}\min\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^3},a+b^2+c^3\right\}=$________.

11. 解不等式 $\sqrt{4x-2}+2\sqrt{3-x}>\frac{2000}{1999}$.

12. 已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}[ax^2+(a+2)x+a+2]$，若 $f(x)$ 有最大值或最小值，求参数 a 的取值范围.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,x)$，$\boldsymbol{b}=(x^2+x,-x)$，$m$ 为常数且 $m\leqslant -2$，求使 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2>m\left(\frac{2}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}+1\right)$成立的 x 的范围.

14. 证明：对每个 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的 x，适合 $\left|\sqrt{1-x^2}-px-q\right|\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 的唯一的实数对 (p,q) 是 $\left(-1,\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

15. (第14届“希望杯”数学邀请赛试题) 设函数 $f(x)=\sqrt[3]{1+x}-\lambda x$，其中 $\lambda>0$.

(1) 求 λ 的取值范围，使 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数；

(2) 此种单调性能否扩展到整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上?

(3) 解不等式 $2x-\sqrt[3]{1+x}<12$.

16. 已知 $x\in[0,1]$ 时，不等式 $x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$ 恒成立，求 θ 的取值范围.

17. 设 x、y、z 是直角三角形的三边长，且 z 是斜边长，当不等式 $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)>kxyz$ 恒成立时，求参数 k 的最大值，并指出何时等号成立.

18. 设 $x,y\in\mathbf{R}^+$，且 $x+y=k$，试求 k 值的范围，使不等式 $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\geqslant\left(\frac{k}{2}+\frac{2}{k}\right)^2$ 恒成立.

19. (2006年浙江省高中数学竞赛集训试题) 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，且满足 $\frac{kabc}{a+b+c}\geqslant(a+b)^2+(a+b+4c)^2$，求 k 的最小值.

20. 已知 a、b、x、y 为非负实数，且 $a+b=27$. 试求 λ 的最大值，使得不等式 $(ax^2+by^2+4xy)^3\geqslant\lambda(ax^2y+bxy^2)^2$ 恒成立，并求此时等号成立的条件.

21. 给定一个实数 a，解关于 x 的不等式 $\sqrt{3x-5a}-\sqrt{x-a}>1$.

22. 函数 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}(a-1)x^2+ax+1$ 是区间 $(1,2)$ 上的增函数，求实数 a 的取值范围.

23. (1) 求使不等式 $\left(\frac{a}{a+\lambda b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+\lambda a}\right)^2\geqslant\frac{2}{(1+\lambda)^2}$　①

对任意正实数 a、b 恒成立的正实数 λ 的取值范围；

(2) 求使不等式 $\left(\frac{a}{a+\lambda b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+\lambda a}\right)^2\leqslant\frac{2}{(1+\lambda)^2}$　②

对任意正实数 a、b 恒成立的正实数 λ 的取值范围.

24.（首届中国东南地区数学奥林匹克试题）

（1）是否存在正整数的无穷数列$\{a_n\}$，使得对任意的正整数n，都有$a_{n+1}^2 \geqslant 2a_n a_{n+2}$。

（2）是否存在正无理数的无穷数列$\{a_n\}$，使得对任意的正整数n，都有$a_{n+1}^2 \geqslant 2a_n a_{n+2}$。

25.（1999年CMO试题）求最大的实数λ，使得当实系数多项式$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$的所有根都是非负实数时，只要$x \geqslant 0$，就有$f(x) \geqslant \lambda(x-a)^3$，并问等号何时成立？

第3讲　不等式证明的常用方法

知识点金

不等式的证明没有固定程式，证法因题而异，技巧性强，难度较大．基本方法是比较法、综合法、分析法、反证法、数学归纳法，此外，还有放缩法、构造法（如构造函数、方程、向量、复数、几何、抽屉等模型）、换元法、估计法、调整法、假设法、概率法、求导法、递推法、待定系数法等．

不等式的证明，除掌握一些基本方法外，还要能娴熟地运用著名不等式以及它们的推广形式．代数变形能力和计算能力是不等式证明的基础．

在掌握了不等式证明的一些基本方法和几个著名的不等式后，对不等式中一些不怎么"规矩"的问题及一些特殊技巧也要作进一步的了解并掌握之．对一些繁、难、怪的不等式问题要敢于尝试，细心领会其证明技巧和方法．

例题精析

例1　设 $x>0$，$y>0$，$z>0$，试证：$(x^3+y^3+z^3)^{\frac{1}{3}}<(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$．

证明　因为 $(x^3+y^3+z^3)^2-(x^2+y^2+z^2)^3$

$$=x^6+y^6+z^6+2x^3y^3+2y^3z^3+2z^3x^3-(x^6+y^6+z^6+3x^2y^4+3x^2z^4+3x^4y^2+3z^2x^4+3y^2z^4+3y^4z^2+6x^2y^2z^2)$$

$$=-(3x^2y^4-2x^3y^3+3x^4y^2)-(3x^2z^4-2x^3z^3+3x^4z^2)-(3y^2z^4-2y^3z^3+3y^4z^2)-6x^2y^2z^2$$

$$=-x^2y^2[(x-y)^2+2(x^2+y^2)]-x^2z^2[(x-z)^2+2(x^2+z^2)]-y^2z^2[(y-z)^2+2(y^2+z^2)]-6x^2y^2z^2<0，$$

所以 $(x^3+y^3+z^3)^2<(x^2+y^2+z^2)^3$．

而 $x>0$，$y>0$，$z>0$，所以 $(x^3+y^3+z^3)^{\frac{1}{3}}<(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$．

说明 对于无理不等式，常可采用性质“$a>0,b>0$ 且 $a^n>b^n \Rightarrow a>b$”将其转化为整式不等式来证明.

本题采用的是比较法，这是一种通过恒等变形或不等式的运算，将欲证的不等式化为明显的熟知不等式，从而证明原不等式的方法.

不等式大小比较常用如下方法：

(1) 作差：作差后通过分解因式、配方等手段判断差的符号得出结果；(2) 作商(常用于分数指数幂的代数式)；(3) 分析法；(4) 平方法；(5) 分子(或分母)有理化；(6) 利用函数的单调性；(7) 寻找中间量或放缩法；(8) 图象法. 其中比较法(作差、作商)是最基本的方法.

例 2 $0<x<y<1$，求证：$\dfrac{x^y+y^x}{x^x+y^y}<\sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

证明 因为 $0<x<y<1$，所以 $x^{\frac{y-x}{2}}<y^{\frac{y-x}{2}}$，$(x\cdot y)^{\frac{y-x}{2}}<1$.

$$\left[1-(x\cdot y)^{\frac{y-x}{2}}\right]\left[x^{\frac{y-x}{2}}-y^{\frac{y-x}{2}}\right]<0,$$

得：$x^y\cdot x^{\frac{y-x}{2}}+y^x\cdot x^{\frac{y-x}{2}}<x^x\cdot y^{\frac{y-x}{2}}+y^y\cdot y^{\frac{y-x}{2}}$，

故 $\dfrac{x^y+y^x}{x^x+y^y}<\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{y-x}{2}}<\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$.

说明 本题采用的是综合法，即从已知不等式出发，经过逐步推理而导出欲证的不等式的方法.

例 3 已知 a、$b\in \mathbf{R}^+$，且 $a\neq b$，$n\in \mathbf{N}^*$.

求证：$(a+b)(a^n+b^n)<2(a^{n+1}+b^{n+1})$.

证明 (用比较法)

$(a+b)(a^n+b^n)-2(a^{n+1}+b^{n+1})$

$=a^{n+1}+ab^n+a^nb+b^{n+1}-2a^{n+1}-2b^{n+1}=ab^n+a^nb-a^{n+1}-b^{n+1}$

$=a(b^n-a^n)+b(a^n-b^n)=(b^n-a^n)(a-b)$ ①

(至此，为确定该差的符号，应分 $a>b>0$，$b>a>0$ 两种情况讨论，若对该式进一步变形则可避免讨论)

$$=a^n\left[1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right]\cdot(b-a)=a^n(b-a)\cdot\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1-\frac{b}{a}}\cdot\left(1-\frac{b}{a}\right)$$

$$=-a^{n-1}(a-b)^2\left[1+\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}\right].$$ ②

因为 a，$b\in \mathbf{R}^+$，且 $a\neq b$，$n\in \mathbf{N}^*$，

所以 $a^{n-1}>0$，$(a-b)^2>0$，$1+\dfrac{b}{a}+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n-1}>0$，

所以 $-a^{n-1}(a-b)^2\left[1+\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}\right]<0$，

所以 $(a+b)(a^n+b^n)<2(a^{n+1}+b^{n+1})$.

说明　本题利用了“作差法”，其步骤是“作差—变形—判断符号”；其中变形是关键，一是变形的手段，如配方、因式分解等；二是变形的彻底性，以便于符号的判定，本题解答中对①式适当变形后逆用了等比数列的前 n 项和公式变形为②式，从而避免了分类讨论.

例 4　（2005 年北方数学奥林匹克试题）在公差为 $d(d>0)$ 的正数等差数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{3n}$ $(n\geqslant 2)$ 中，任取 $n+2$ 个数. 证明：其中必存在两个数 $a_i,a_j(i\neq j)$，满足不等式 $1<\frac{|a_i-a_j|}{nd}<2$.

证明　在取出的 $n+2$ 个数中，设 a_i 为最大，则 $a_i\leqslant a_{3n}$. 把每个数都加上 $a_{3n}-a_i$，这样处理后不改变任何两数差的绝对值. 从而，总可以认为取出的 $n+2$ 个数中包括 a_{3n}，记 $a_i=a_{3n}$.

（1）若取出的 $n+2$ 个数中，除 a_{3n} 外，还有 $a_{n+1},a_{n+2},\cdots,a_{2n-1}$ 这 $n-1$ 个数中的一个 a_j，则

$|a_{3n}-a_j|\geqslant|a_{3n}-a_{2n-1}|=(n+1)d>nd$，

$|a_{3n}-a_j|\leqslant|a_{3n}-a_{n+1}|=(2n-1)d<2nd$.

故 $1<\frac{|a_{3n}-a_j|}{nd}<2$.

（2）若取出的 $n+2$ 个数中，不含 $a_{n+1},a_{n+2},\cdots,a_{2n-1}$ 这 $n-1$ 个数中的任何一个数. 把这些数及 a_{3n} 之外的 $2n$ 个数组成的集合划分成 n 个子集：

$$\{a_1,a_{2n}\},\{a_2,a_{2n+1}\},\cdots,\{a_n,a_{3n-1}\},$$

这些子集中任何一个子集中的两个数都满足题设不等式. 这样，除 a_{3n} 外，还要取的 $n+1$ 个数必须从这 n 个子集中取出. 根据抽屉原理，必存在一个二元子集，它的两个元素都被取出，而这两个数必满足题设不等式.

综合(1)、(2)，原不等式得证.

说明　类比、联想是构造法的基础. 本题配对构造 n 个子集，利用抽屉原理，使问题得到简证.

例 5　（1）（2005 年湖南省数学竞赛试题）若正数 a,b,c 满足 $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}-\frac{c}{a+b}$，求证：$\frac{b}{c+a}\geqslant\frac{\sqrt{17}-1}{4}$；

（2）已知 a,b,c,d 均为正数，且 $\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}+\frac{d^2}{1+d^2}=1$，求证：$abcd\leqslant\frac{1}{9}$.

分析　对于(1)，可先从已知等式中分离出 $\frac{b}{c+a}$，并注意到各分式的分子为单项式，而分母为多项式，可从换元入手. 对于(2)，根据已知等式中四个分式的特点，可通过三角代换，转化为三角不等式的证明.

证明　（1）由题设得 $\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}$.　①

令 $a+b=x, b+c=y, c+a=z(x,y,z>0)$，则

$$a=\frac{z+x-y}{2}, b=\frac{x+y-z}{2}, c=\frac{y+z-x}{2}.$$

从而，由①得 $\quad \frac{x+y-z}{2z}=\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}$，

即 $\frac{x+y}{z}=\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}-1=(\frac{y}{x}+\frac{x}{y})+(\frac{z}{x}+\frac{z}{y})-1$

$$\geqslant \frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1=\frac{z(x+y)}{xy}+1$$

$$\geqslant \frac{z(x+y)}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}+1=\frac{4z}{x+y}+1.$$

令 $\frac{x+y}{z}=t(t>0)$，则 $t\geqslant \frac{4}{t}+1$，即 $t^2-t-4\geqslant 0$. 注意到 $t>0$，解得 $t\geqslant \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

故 $\frac{b}{c+a}=\frac{x+y-z}{2z}=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\geqslant \frac{\sqrt{17}-1}{4}$.

(2) 设 $a=\tan\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$，则 $\frac{a^2}{1+a^2}=\sin^2\alpha$，又设 $b=\tan\beta, c=\tan\gamma, d=\tan\delta, \beta,\gamma,\delta\in(0,\frac{\pi}{2})$，则由 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2\delta=1$，得

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1-\sin^2\delta=\cos^2\delta.$$

从而 $\quad \sqrt[3]{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma}\leqslant \frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}{3}=\frac{1}{3}\cos^2\delta.$

同理，$\sqrt[3]{\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma\cdot\sin^2\delta}\leqslant \frac{1}{3}\cos^2\alpha$，

$$\sqrt[3]{\sin^2\gamma\cdot\sin^2\delta\cdot\sin^2\alpha}\leqslant \frac{1}{3}\cos^2\beta,$$

$$\sqrt[3]{\sin^2\delta\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}\leqslant \frac{1}{3}\cos^2\gamma.$$

以上四式相乘，得 $\quad \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma\cdot\sin^2\delta\leqslant \frac{1}{81}\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta\cdot\cos^2\gamma\cdot\cos^2\delta.$

所以 $\tan^2\alpha\cdot\tan^2\beta\cdot\tan^2\gamma\cdot\tan^2\delta\leqslant \frac{1}{81}$. 故 $abcd\leqslant \frac{1}{9}$.

说明 本题采用换元法，对结构较为复杂、变量较多、变量间关系不甚明了的不等式，则可适当引入新变量，通过代换，简化原有结构，实现某种变通，给证明的成功带来新的转机. 常用的变量替换有：局部代换、整体代换、三角代换、二元对称代换、真分式代换等.

例 6 已知 $a、b、c\in\mathbf{R}$，求证 $\quad \frac{(a^2+b^2+ac)^2+(a^2+b^2+bc)^2}{a^2+b^2}\geqslant(a+b+c)^2.$

证明 现将原不等式两边同除以 a^2+b^2,然后两边开平方得:

$$\sqrt{\frac{(a^2+b^2+ac)^2+(a^2+b^2+bc)^2}{(a^2+b^2)^2}}\geqslant\frac{|a+b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

即 $$\sqrt{\left(1+\frac{ac}{a^2+b^2}\right)^2+\left(1+\frac{bc}{a^2+b^2}\right)^2}\geqslant\frac{|a+b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

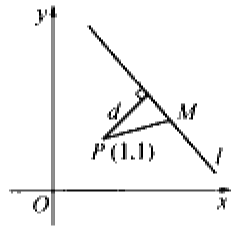


图 3-1

此不等式右边表示点 $P(1,1)$ 到直线 $l:ax+by+c=0$ 的距离 d,左边表示点 $P(1,1)$ 到点 $M\left(-\frac{ac}{a^2+b^2},-\frac{bc}{a^2+b^2}\right)$ 的距离(如图 3-1),易知点 M 在直线 l 上,又由平几性质知 $|PM|\geqslant d$. 故原不等式获证.

说明 此题若按常规证法,将不胜繁琐.

本题采用构造法,使问题简捷获证.

构造法针对欲证不等式的特点,通过观察、类比,展开联想,抓住知识间的横向联系,构造出符合要求的数、式、函数、图形等数学模型,通过转化,达到证明的目的. 构造法对思维的要求比较高,是具有一定创造性的方法.

例 7 (2002 年中国国家集训队测试题)设 n 个集合 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 的元素由非负整数组成,x_i 为 S_i 的所有元素之和. 求证:若对某个自然数 k,$1<k<n$,有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\leqslant\frac{1}{k+1}\left[k\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-(k+1)^2\frac{n(n+1)}{2}\right],$$ 则存在下标 i,j,t,l(至少有三个互不相同)使 $x_i+x_j=x_t+x_l$.

分析 如果结论不成立,即 $x_i-x_t\neq x_l-x_j$,因而对任意的正整数 $1<m\leqslant n$,诸 $x_j-x_i(1\leqslant i<j\leqslant m$,不妨设 $x_j>x_i)$互不相等,则 L 个 x_j-x_i 的和 $\geqslant0+1+2+\cdots+L$,据此导出 x_n 的一个下界,进而得到对任意的 $1<k<n$,题目中的条件不等式反向,从而矛盾. 因数值 $1,2,\cdots,L$ 可看成抽屉,故这种处理方法可以看成抽屉原理的推广.

证明 (反证法)若对任取的 $i,j,t,l\in\{1,2,\cdots,n\}$(至少有三个互不相同)均有 $x_i-x_j\neq x_t-x_l$ 则将证明:对任取的 $1<k<n$ 有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i>\frac{1}{k+1}\left[k\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-(k+1)^2\frac{n(n+1)}{2}\right]$$ 成立.

不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$.

由假设,$x_j-x_i(1\leqslant i<j\leqslant m)$互不相等,且 $x_i\geqslant0$,因此

$$\begin{aligned}M&=\sum_{i=1}^{m-1}(x_{i+1}-x_i)+\sum_{i=1}^{m-2}(x_{i+2}-x_i)+\cdots+\sum_{i=1}^{m-k}(x_{i+k}-x_i)\\&\geqslant0+1+2+3+\cdots+\left[\frac{(2m-1-k)k}{2}-1\right]\\&\geqslant\frac{(2m-1-k)k}{4}\left[\frac{(2m-1-k)k}{2}-1\right]\end{aligned}$$

$$> \frac{1}{2}m^2k^2 - \frac{1}{2}k[k(k+1)+1]m.$$

另一方面

$$\begin{aligned}M &= \sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i) + \sum_{i=1}^{n-2}(x_{i+2}-x_i) + \cdots + \sum_{i=1}^{n-k}(x_{i+k}-x_i)\\ &= (x_n - x_1) + (x_n + x_{n-1} - x_2 - x_1) + \cdots + (x_n + x_{n-1} + \cdots + x_{n-k+1} - x_k - x_{k-1} - \cdots - x_1)\\ &\leqslant kx_n + (k-1)x_{n-1} + \cdots + x_{n-k+1}\\ &\leqslant kx_n + (k-1)x_n + \cdots + x_n = \frac{k(k+1)}{2}x_n,\end{aligned}$$

于是 $\frac{k(k+1)}{2}x_n > \frac{1}{2}m^2k^2 - \frac{1}{2}k[k(k+1)+1]m$,

所以 $x_n > \frac{k}{k+1}m^2 - \frac{k(k+1)+1}{k+1}m \geqslant \frac{k}{k+1}m^2 - (k+1)m(k < m \leqslant n)$.

显然,当 $1 \leqslant m \leqslant k$ 时,这个不等式也成立.

因此 $\sum_{i=1}^{n}x_i > \frac{k}{k+1}\sum_{i=1}^{n}i^2 - (k+1)\sum_{i=1}^{n}i$

$$= \frac{1}{k+1}\left[k\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (k+1)^2\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

对 $1<k<n$ 成立.

说明 本题采用反证法.有些不等式,直接从正面证明比较困难,此时可从反面考虑,假设所证不等式不成立,导出矛盾,从而证明了原不等式成立.

例 8 设 a、b、$c\in\mathbf{R}_+$,求证:

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2) \geqslant (ab+bc+ca)^3.$$

分析 此不等式关于 a、b、c 齐次,我们可以假设 $a+b+c=1$ 或 $ab+bc+ca=1$ 或 $abc=1$,……但发现假设 $ab+bc+ca=1$ 最好.这样,原题就变为:

设 a、b、$c\in\mathbf{R}_+$,且 $ab+bc+ca=1$,求证:$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2) \geqslant 1$.

证明 由于
$$\begin{aligned}a^2+ab+b^2 &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{2ab}{2} + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}(a^2+b^2)\\ &= \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(a^2+b^2)\\ &\geqslant \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2 = \frac{3}{4}(a+b)^2,\end{aligned}$$

故只须证明 $\prod\frac{3}{4}(a+b)^2 \geqslant 1$.

在 $\triangle ABC$ 中,有

$$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2} = 1.$$

令 $a=\tan\dfrac{A}{2}, b=\tan\dfrac{B}{2}, c=\tan\dfrac{C}{2}$.

只须证明 $\prod\dfrac{3}{4}\left(\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\right)^2\geqslant 1$，即

$$\prod\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)^2\geqslant\frac{64}{27}$$

$$\Leftrightarrow\prod\left(\frac{\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}}\right)^2\geqslant\frac{64}{27}$$

$$\Leftrightarrow\prod\left(\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}}\right)^2\geqslant\frac{64}{27}$$

$$\Leftrightarrow\prod\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}\geqslant\frac{8}{3\sqrt{3}}\Leftrightarrow\prod\cos\frac{A}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

而
$$\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\leqslant\left(\frac{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}{3}\right)^3$$

$$\leqslant\left(\cos\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}\right)^3=\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

因此，所证不等式成立.

说明 例8是利用不等式的齐次性，增加了一个假设条件，如 $\sum a=1$，或 $\sum ab=1$. 顺便指出，处理这类问题时，应该根据不同的题目假设不同的条件，一般都是假设一个齐次式为1.

对于某些形式复杂的齐次不等式问题，常常可以通过增加如下的假设条件之一：

$$a+b+c=1, a^2+b^2+c^2=1,$$
$$ab+bc+ca=1, abc=1, \cdots\cdots$$

将其变成一个非齐次不等式. 这样处理的好处就在于，可以简化待证不等式的形式，减少计算量.

例9 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为正数，求证：

$$\frac{a_2}{(a_1+a_2)^2}+\frac{a_3}{(a_1+a_2+a_3)^2}+\cdots+\frac{a_n}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}<\frac{1}{a_1}.$$

证明 这是一个和式不等式，为了达到求和的目的，受一个基本不等式 $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2(n\in\mathbf{N}^*)$ 的证明而得到的启示，可将左边各项的分母放缩为相邻两项之积，通过拆项

来求和.

因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为正数,所以有

$$\frac{a_2}{(a_1+a_2)^2}+\frac{a_3}{(a_1+a_2+a_3)^2}+\cdots+\frac{a_n}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}$$

$$<\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}+\frac{a_3}{(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)}+\cdots+\frac{a_n}{(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})(a_1+a_2+\cdots+a_n)}$$

$$=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_1+a_2}-\frac{1}{a_1+a_2+a_3}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}-\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)$$

$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}<\frac{1}{a_1}.$$

说明 本题采用放缩法,所谓放缩,就是欲证不等式 $A\geqslant B$,可借助一个或多个中间量,通过适当地缩小,使得 $A\geqslant A_1,A_1\geqslant A_2,\cdots,A_{n-1}\geqslant A_n,A_n\geqslant B$;或通过适当地放大,使得 $B\leqslant B_1$,$B_1\leqslant B_2,\cdots,B_{n-1}\leqslant B_n,B_n\leqslant A$,利用传递性,证得所要证的不等式.

例 10 若 $x_i>0,i=1,2,3$,且 $\sum_{i=1}^{3}x_i=1$,则 $\frac{1}{1+x_1^2}+\frac{1}{1+x_2^2}+\frac{1}{1+x_3^2}\leqslant\frac{27}{10}$.

证明 先证明:对任意 $0<x<1$ 有 $\frac{1}{1+x^2}\leqslant\frac{27}{50}(2-x)$. (1)

去分母,整理得 $x^3-2x^2+x-\frac{4}{27}\leqslant 0$.

将左边因式分解为 $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\left(x-\frac{4}{3}\right)\leqslant 0$,

该不等式显然成立,且当 $x=\frac{1}{3}$时,等号成立.

现对原不等式给出证明:

因 $0<x_i<1$,由(1)得 $\frac{1}{1+x_i^2}\leqslant\frac{27}{50}(2-x_i)$,

故 $\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{1+x_i^2}\leqslant\sum_{i=1}^{3}\frac{27}{50}(2-x_i)=\frac{27}{50}(6-\sum_{i=1}^{3}x_i)=\frac{27}{50}(6-1)=\frac{27}{10}$.

当 $x_1=x_2=x_3=\frac{1}{3}$ 时等号成立.

说明 (1)式实际上是$\frac{1}{1+x^2}$的一次式估计.

例 11 在$\triangle ABC$中,求证:

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geqslant 2-8\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}, \quad ①$$

等号成立的条件是$\triangle ABC$为等边三角形.

证明　(构造向量法)设$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$是平面上的单位向量,且$\boldsymbol{j}$与$\boldsymbol{k}$成角为$\pi-\angle A$,$\boldsymbol{k}$与$\boldsymbol{i}$成角为$\pi-\angle B$,$\boldsymbol{i}$与$\boldsymbol{j}$成角为$\pi-\angle C$.则$\left(\boldsymbol{i}\tan\frac{A}{2}+\boldsymbol{j}\tan\frac{B}{2}+\boldsymbol{k}\tan\frac{C}{2}\right)^2\geqslant 0$.

故　$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}$

$$\geqslant 2\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\cdot\cos C+2\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}\cdot\cos A+2\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}\cdot\cos B$$

$$=2\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\left(1-2\sin^2\frac{C}{2}\right)+2\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)+$$
$$2\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}\left(1-2\sin^2\frac{B}{2}\right)$$

$$=2\left(\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}\right)-$$
$$4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\left[\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}}\right]$$

$$=2-4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}$$

$$=2-8\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$$

注意到,在$\triangle ABC$中有熟知的等式

$$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}=1.$$

从而,式①成立.

例12　试证不等式$\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)^2<\frac{1}{2}$(其中$n\in\mathbf{N}^*$)

证法1　由Cauchy不等式,得

$$\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}\cdot 1+\frac{1}{n+2}\cdot 1+\cdots+\frac{1}{2n}\cdot 1\right)^2$$

$$\leqslant\underbrace{(1^2+1^2+\cdots+1^2)}_{n个}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]$$

$$<n\left[\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n)}\right]$$

$$= n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$

$$= n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}.$$

证法 2 利用平均值不等式(算术平均值不超过平方平均值)证明原不等式等价于

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由于 n 个正数的算术平均值不超过这 n 个正数的平方平均值，故有

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$\leqslant n\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}}{n}}$$

$$<\sqrt{n}\cdot\sqrt{\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n)}}$$

$$=\sqrt{n}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}}$$

$$=\sqrt{n}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 13 设 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 是正实数，满足条件 $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_{n+1}}=1$，求证：$x_1x_2\cdots x_{n+1}\geqslant n^{n+1}$.

证明 (基本不等式法)令 $y_i=\frac{1}{1+x_i}$，$i=1,2,\cdots,n+1$，则 $\sum_{i=1}^{n+1}y_i=1$.

令 $s_i=\sum_{1\leqslant j\leqslant n+1,j\neq i}y_j$，$p_i=\prod_{1\leqslant j\leqslant n+1,j\neq i}y_j$.

由算术—几何不等式，有 $\frac{1-y_i}{y_i}=\frac{s_i}{y_i}\geqslant\frac{n\sqrt[n]{p_i}}{y_i}$，因为在乘积 $\prod_{i=1}^{n+1}\sqrt[n]{p_i}$ 中，每个 $\sqrt[n]{y_i}$ 恰出现 n 次，则有 $\prod_{i=1}^{n+1}\sqrt[n]{p_i}=\prod_{i=1}^{n+1}y_i$.

所以 $x_1x_2\cdots x_{n+1}=\prod_{i=1}^{n+1}\left(\frac{1-y_i}{y_i}\right)\geqslant\prod_{i=1}^{n+1}\frac{n\sqrt[n]{p_i}}{y_i}=n^{n+1}\frac{\prod_{i=1}^{n+1}y_i}{\prod_{i=1}^{n+1}y_i}=n^{n+1}$.

说明 以上命题表明：如果正数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 满足条件：

$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}=1-\frac{1}{1+x_{n+1}}$，则有 $x_{n+1}\geqslant\frac{n^{n+1}}{\prod_{i=1}^{n}x_i}$.

因此，有 $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\geqslant 1-\frac{1}{1+\frac{n^{n+1}}{\prod_{i=1}^{n}x_i}}=\frac{n^{n+1}}{n^{n+1}+x_1x_2\cdots x_n}$.

由此可引出一新命题若：$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}<1$，

则有 $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\geqslant\frac{n^{n+1}}{n^{n+1}+x_1x_2\cdots x_n}$.

如果 $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\geqslant 1$，上述不等式显然成立.

故可得以下命题：设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正实数，则

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\geqslant\frac{n^{n+1}}{n^{n+1}+x_1x_2\cdots x_n}.$$

由此命题可推出以下结果：

(1) 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，则 $\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2a}\geqslant\frac{8}{8+4}=\frac{2}{3}$.

(2) 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，则 $\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+a}\leqslant\frac{2}{3}$.

(3) 已知 $x_i\in\mathbf{R}^+$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $\frac{x_1}{x_1+nx_2}+\frac{x_2}{x_2+nx_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_n+nx_1}\geqslant\frac{n}{n+1}$，等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取得.

(4) 已知 $x_i\in\mathbf{R}^+$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $\frac{x_1}{nx_1+x_2}+\frac{x_2}{nx_2+x_3}+\cdots+\frac{x_n}{nx_n+x_1}\leqslant\frac{n}{n+1}$，等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取得.

对于某些条件不等式，可以固定其中一些变数，化为一元函数，再经过调整得出所需要的结果．这种方法称为“导数调整法”.

例 14　已知 a、b、c 为非负实数，且 $a+b+c=1$. 求证：

$$(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2\geqslant 2.$$

证明　(调整法)注意到，在 $a=1$，$b=c=0$ 时，所证不等式成立. 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$. 固定 b，则 $c=1-b-a$ 是 a 的函数.

考虑 a 的函数 $f(a)=(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2$，

有 $f(a)$ 递减 $\Leftrightarrow f'(a)\leqslant 0$

$$\Leftrightarrow -a(1-a^2)+c(1-c^2)\leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (a-c)(a^2+ac+c^2-1)\leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow a^2+ac+c^2-1\leqslant 0$$
$$\Leftarrow (a+c)^2\leqslant 1.$$

最后的不等式显然成立. 所以，$f(a)$ 递减. 可以使 a 增大 c 减小($a+c$ 保持不变)，而 $f(a)$

一直减小，直至 c 减小至 0，于是，

$$(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2 \geqslant (1-a^2)^2+(1-b^2)^2+1,$$

其中 $a+b=1$.

对函数 $\varphi(a)=(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+1(a+b=1)$ 采用同样的做法(前面的 c 换成 b)，可知 $\varphi(a)$ 递减. 所以，$\varphi(a)\geqslant(1-1^2)^2+(1-0^2)^2+1=2$.

因此，所证不等式成立.

说明 由例 14 可以看出，导数调整法的步骤是：

(1) 选定目标，也就是不等式中等号成立(函数取最大值或最小值)的情况；

(2) 固定一些变量，使函数成为一元函数；

(3) 确定调整方向，也就是应证明该一元函数递增或递减；

(4) 利用导数证明函数递增或递减，从而使一个变量调整到所需要的值；

(5) 继续采取上面的做法，直至使各个变量都调整到所需要的值.

例 15 (第 36 届 IMO 试题)

设 a,b,c 为正实数且满足 $abc=1$. 试证：

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}. \qquad ①$$

证法 1 因当 $a>0$ 时，有 $a\geqslant 2-\frac{1}{a}$.

故 $\frac{1}{a^3(b+c)}=\frac{1}{2a}\cdot\frac{2}{a^2(b+c)}\geqslant\frac{1}{2a}\left(2-\frac{a^2(b+c)}{2}\right)=\frac{1}{a}-\frac{ab+ac}{4}$.

同理 $\frac{1}{b^3(c+a)}\geqslant\frac{1}{b}-\frac{bc+ba}{4}$，$\quad\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{1}{c}-\frac{ca+cb}{4}$.

以上三式相加并注意到 $abc=1$，得

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$$
$$\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\geqslant\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3}{2}.$$

证法 2 $\frac{1}{a^3(b+c)}=\left[\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{a(b+c)}{4}\right]-\frac{a(b+c)}{4}$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{a(b+c)}{4a^3(b+c)}}-\frac{a(b+c)}{4}=\frac{1}{a}-\frac{ab}{4}-\frac{ac}{4}.$$

因 $abc=1$，故 $\frac{1}{a}=bc$，即

$$\frac{1}{a^3(b+c)}\geqslant bc-\frac{ab}{4}-\frac{ac}{4}.$$

同理 $\quad\frac{1}{b^3(c+a)}\geqslant ca-\frac{ab}{4}-\frac{bc}{4}$，$\quad\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant ab-\frac{ac}{4}-\frac{bc}{4}$.

三式相加，得

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3}{2}.$$

证法 3 原不等式等价于 $\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$. ③

$$(bc+ca+ab)^2=\left(\lambda_1\cdot\frac{bc}{\lambda_1}+\lambda_2\cdot\frac{ca}{\lambda_2}+\lambda_3\cdot\frac{ab}{\lambda_3}\right)^2$$

$$\leqslant(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\cdot\left(\frac{b^2c^2}{\lambda_1^2}+\frac{c^2a^2}{\lambda_2^2}+\frac{a^2b^2}{\lambda_3^2}\right).$$

令 $\lambda_1^2=a(b+c),\ \lambda_2^2=b(c+a),\ \lambda_3^2=c(a+b)$

得 $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=2(bc+ca+ab)$.

故③式左边 $\geqslant\frac{(bc+ca+ab)^2}{2(bc+ca+ab)}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{(abc)^2}=\frac{3}{2}$.

说明 此证法运用了含参数的柯西不等式.

证法 4 利用条件 $abc=1$，易得 $\frac{1}{a^3(b+c)}=\frac{a^2b^2c^2}{a^3(b+c)}=\frac{b^2c^2}{ab+ac}$.

题中的不等式等价于 $\frac{b^2c^2}{ab+ac}+\frac{c^2a^2}{bc+ba}+\frac{a^2b^2}{ca+cb}\geqslant\frac{3}{2}$.

约定将此不等式左边的代数式记为 k. 利用"柯西不等式"(Cauchy 不等式)和"算术平均与几何平均不等式"(AM- GM 不等式)，得

$$[(ab+ac)+(bc+ba)+(ca+cb)]\cdot k$$

$$\geqslant\left(\sqrt{ab+ac}\cdot\frac{bc}{\sqrt{ab+ac}}+\sqrt{bc+ba}\cdot\frac{ca}{\sqrt{bc+ba}}+\sqrt{ca+cb}\cdot\frac{ab}{\sqrt{ca+cb}}\right)^2$$

$$=(bc+ca+ab)^2\geqslant3\sqrt[3]{(bc)\cdot(ca)\cdot(ab)}\cdot(bc+ca+ab)=(bc+ca+ab)\cdot3.$$

由此即得 $k\geqslant\frac{3}{2}$.

证法 5 (待定系数法) 用 $a^2b^2c^2$ 替换分子中的 1. 不等式等价于

$$\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

用"λ 方法". $\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\lambda a(b+c)\geqslant2\sqrt{\lambda}bc,\cdots$.

将所得三式相加，得

$$\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}+2\lambda(ab+bc+ca)\geqslant2\sqrt{\lambda}(ab+bc+ca),$$

$$\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}$$

$\geqslant (2\sqrt{\lambda}-2\lambda)(ab+bc+ca)$

$\geqslant 6(\sqrt{\lambda}-\lambda)\sqrt[3]{(abc)^2}=6(\sqrt{\lambda}-\lambda)$.

令 $6(\sqrt{\lambda}-\lambda)=\frac{3}{2}$，解得 $\lambda=\frac{1}{4}$. 因此原不等式成立.

证法 6 （概率法）因为 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，且 $abc=1$，所以 $a^2b^2c^2=1$.

因此，原不等式等价于 $\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$.

令 $b\cdot c=x,c\cdot a=y,a\cdot b=z$，则 $x\cdot y\cdot z=a^2b^2c^2=1$.

因此，原不等式等价于 $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant\frac{3}{2}$.

记 $x+y+z=s$，构造随机变量 ξ 的概率分布列为：

$$P\left(\xi=\frac{x}{s-x}\right)=\frac{s-x}{2s},\ P\left(\xi=\frac{y}{s-y}\right)=\frac{s-y}{2s},\ P\left(\xi=\frac{z}{s-z}\right)=\frac{s-z}{2s}.$$

所以 $E\xi=\frac{x}{s-x}\cdot\frac{s-x}{2s}+\frac{y}{s-y}\cdot\frac{s-y}{2s}+\frac{z}{s-z}\cdot\frac{s-z}{2s}=\frac{x+y+z}{2s}=\frac{1}{2}$.

$$E\xi^2=\left(\frac{x}{s-x}\right)^2\cdot\frac{s-x}{2s}+\left(\frac{y}{s-y}\right)^2\cdot\frac{s-y}{2s}+\left(\frac{z}{s-z}\right)^2\cdot\frac{s-z}{2s}$$

$$=\frac{1}{2s}\left(\frac{x^2}{s-x}+\frac{y^2}{s-y}+\frac{z^2}{s-z}\right).$$

因为 $E\xi^2\geqslant(E\xi)^2$，

所以 $\frac{1}{2s}\left(\frac{x^2}{s-x}+\frac{y^2}{s-y}+\frac{z^2}{s-z}\right)\geqslant\frac{1}{4}$，

所以 $\frac{x^2}{s-x}+\frac{y^2}{s-y}+\frac{z^2}{s-z}\geqslant\frac{1}{2}s=\frac{1}{2}(x+y+z)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}$.

故原不等式成立.

说明 上述证法利用了数学期望的一个性质.

设 ξ 是一取有限个值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的离散型随机变量，其概率分布列为 $P(\xi=x_i)=P_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $E\xi^2-(E\xi)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot P_i-(E\xi)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E\xi)^2\cdot P_i\geqslant0$，故 $E\xi^2\geqslant(E\xi)^2$，当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=E\xi$ 时，不等式中等号成立.

这种证法构思巧妙，思路清晰，富于规律，易于掌握. 运用此法的关键就在于要能准确地构造出适当的离散型随机变量的概率分布列，那就是必须满足：① 要保证随机变量 ξ 取各值 x_i 时的概率：$0<P_i<1$；② 各概率之和等于 1，即 $\sum_{i=1}^{n}P_i=1$；③ 要能确保原不等式中"等号"成立的充要条件不能改变.

例 16 证明：对任意满足 $0<a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$ 的实数 a,b,c,d 均有

$$\frac{a^b\cdot b^c\cdot c^d\cdot d^a}{b^a\cdot c^b\cdot d^c\cdot a^d}\geqslant 1.\qquad ①$$

证明 设 $b=ax,c=ay,d=az$，则 $1\leqslant x\leqslant y\leqslant z$，要证不等式①等价于证明

$$x^y\cdot y^z\cdot z\geqslant xy^x\cdot z^y.\qquad ②$$

进一步，令 $y=xs,z=xt$，则 $1\leqslant s\leqslant t$，要证②式转为证明 $y^{t-1}\geqslant t^{\frac{y-1}{x}}$.　③

注意到 $y=1$ 时，$x=1,s=1$，从而 $y^{t-1}=1=t^{\frac{y-1}{x}}$，不等式③成立；$t=1$ 时，有 $y^{t-1}=1=t^{\frac{y-1}{x}}$，③亦成立. 下面考虑 $y>1,t>1$ 的情形，此时③等价于 $y\geqslant t^{\frac{y-1}{x}\cdot\frac{1}{t-1}}$，等价于 $y^{\frac{y}{y-1}}\geqslant t^{\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{t-1}}$，结合 $s-1=\frac{y}{x}-1=\frac{y-x}{x}\leqslant\frac{y-1}{x}\leqslant y-1$. 于是，我们只需要证明

$$y^{\frac{y}{y-1}}\geqslant t^{\frac{s}{t-1}}\left(\text{其中 }1\leqslant s\leqslant t,s=\frac{y}{x}\leqslant y\right).\qquad ④$$

为证不等式④成立，我们分两种情形分别处理.

情形一：$y\geqslant t$，此时记 $f(u)=u^{\frac{u}{u-1}},u>1$. 则 $\ln f(u)=\frac{u}{u-1}\ln u$，于是两边求导，得

$$\frac{f'(u)}{f(u)}=\left(\frac{u}{u-1}\ln u\right)'=\left(\ln u+\frac{1}{u-1}\ln u\right)'=\frac{1}{u}+\frac{1}{u(u-1)}-\frac{\ln u}{(u-1)^2}$$
$$=\frac{1}{u-1}-\frac{\ln u}{(u-1)^2}=\frac{1}{(u-1)^2}(u-1-\ln u).$$

注意到 $(u-1-\ln u)'=1-\frac{1}{u}>0$，故 $u-1-\ln u>1-1-\ln 1=0$. 所以，$f'(u)>0$，从而 $f(u)$ 在 $u>1$ 时严格递增. 从而 $y^{\frac{y}{y-1}}\geqslant t^{\frac{t}{t-1}}\geqslant t^{\frac{s}{t-1}}$.

情形二：$y<t$，我们记 $g(u)=u^{\frac{1}{u-1}}$，则 $\ln g(u)=\frac{1}{u-1}\ln u$. 同上可知

$$\frac{g'(u)}{g(u)}=\frac{1}{u(u-1)^2}(u-1-u\ln u),$$

而 $(u-1-u\ln u)'=1-1-\ln u=-\ln u<0$（当 $u>1$ 时），

故 $u-1-u\ln u<1-1-1\ln 1=0$. 从而 $u>1$ 时 $g'(u)<0$，从而 $g(u)$ 在 $u>1$ 时单调递减.

所以，$t^{\frac{s}{t-1}}<y^{\frac{s}{y-1}}\leqslant y^{\frac{y}{y-1}}$.

综上可知，不等式①成立.

例 17　设 $0<\alpha<\beta<\gamma<\frac{\pi}{2}$，且 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$，求证：

$$\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{9}-1}\qquad ①$$

证明　设 $x=\sin^2\alpha,y=\sin^2\beta,z=\sin^2\gamma$，则原题等价于

$x、y、z>0$，且 $x+y+z=1$，求证：$\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{1-x^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{y^{\frac{2}{3}}}{1-y^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{z^{\frac{2}{3}}}{1-z^{\frac{2}{3}}}\geqslant\dfrac{3}{\sqrt[3]{9}-1}$.

事实上，记 $f(x)=\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{1-x^{\frac{2}{3}}}$，则 $f(x)$ 在 $0<x<1$ 上的导函数为 $f'(x)=\dfrac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{(1-x^{\frac{2}{3}})^2}$.

故曲线 $y=f(x)(0<x<1)$ 在 $x=\dfrac{1}{3}$ 处的切线方程为

$$y=\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}}{\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^2}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

考虑用切线的值去估计曲线 $y=f(x)$ 的值，以便"化曲为直"．于是猜测，当 $0<x<1$ 时，

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{1-x^{\frac{2}{3}}}\geqslant\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}}{\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^2}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}} \qquad ②$$

为证明式②，令 $p=x^{\frac{1}{3}}, q=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$，则 $0<p、q<1$．于是，

式② $\Leftrightarrow \dfrac{p^2}{1-p^2}-\dfrac{q^2}{1-q^2}\geqslant\dfrac{2(p^3-q^3)}{3q(1-q^2)^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{p^2-q^2}{(1-p^2)(1-q^2)}\geqslant\dfrac{2(p^3-q^3)}{3q(1-q^2)^2}$

$\Leftrightarrow 3q(1-q^2)^2(p^2-q^2)\geqslant 2(p^3-q^3)(1-p^2)(1-q^2)$

$\Leftrightarrow (p-q)^2(1-q^2)[(2p^3+4p^2q)+(3q^2-1)(2p+q)]\geqslant 0$.

而 $1-q^2>0,(p-q)^2\geqslant 0,\ (2p^3+4p^2q)+(3q^2-1)(2p+q)>0$，

所以，式②成立．当且仅当 $p=q$，即 $x=\dfrac{1}{3}$ 时取等号．

故 $\quad \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{1-x^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{y^{\frac{2}{3}}}{1-y^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{z^{\frac{2}{3}}}{1-z^{\frac{2}{3}}}$

$$\geqslant\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}}{\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^2}(x+y+z-1)+\frac{3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{3}{\sqrt[3]{9}-1},$$

当且仅当 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时取等号.

从而,式①成立.

例 18 设△ABC的三边长为 a、b、c,相对应的角的弧度数为 α、β、γ, n 为自然数. 求证: $\left(\frac{\pi}{3}\right)^n\leqslant\frac{a\alpha^n+b\beta^n+c\gamma^n}{a+b+c}<\frac{\pi^n}{2}$.

证明 因为 $(\beta-\gamma)(b\beta^{n-1}-c\gamma^{n-1})+(\gamma-\alpha)\cdot(c\gamma^{n-1}-a\alpha^{n-1})+(\alpha-\beta)(a\alpha^{n-1}-b\beta^{n-1})\geqslant 0$,

所以 $2(a\alpha^n+b\beta^n+c\gamma^n)\geqslant a\alpha^{n-1}(\beta+\gamma)+b\beta^{n-1}(\gamma+\alpha)+c\gamma^{n-1}(\alpha+\beta)$,

$$\begin{aligned}3(a\alpha^n+b\beta^n+c\gamma^n)&\geqslant(\alpha+\beta+\gamma)(a\alpha^{n-1}+b\beta^{n-1}+c\gamma^{n-1})\\&=\pi(a\alpha^{n-1}+b\beta^{n-1}+c\gamma^{n-1}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a\alpha^n+b\beta^n+c\gamma^n&\geqslant\frac{\pi}{3}(a\alpha^{n-1}+b\beta^{n-1}+c\gamma^{n-1})\\&\geqslant\left(\frac{\pi}{3}\right)^2(a\alpha^{n-2}+b\beta^{n-2}+c\gamma^{n-2})\\&\geqslant\cdots\\&\geqslant\left(\frac{\pi}{3}\right)^{n-1}(a\alpha+b\beta+c\gamma)\\&\geqslant\left(\frac{\pi}{3}\right)^n(a+b+c).\end{aligned}$$

故 $\frac{a\alpha^n+b\beta^n+c\gamma^n}{a+b+c}\geqslant\left(\frac{\pi}{3}\right)^n$.

$$\begin{aligned}\text{又}\ \frac{a\alpha^n+b\beta^n+c\gamma^n}{a+b+c}&\leqslant\frac{a\alpha^n}{2a}+\frac{b\beta^n}{2b}+\frac{c\gamma^n}{2c}=\frac{\pi^n}{2}\left[\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n+\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^n+\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^n\right]\\&\leqslant\frac{\pi^n}{2}\left(\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\beta}{\pi}+\frac{\gamma}{\pi}\right)=\frac{\pi^n}{2}.\end{aligned}$$

则 $\frac{a\alpha^n+b\beta^n+c\gamma^n}{a+b+c}<\frac{\pi^n}{2}$. 所以 $\left(\frac{\pi}{3}\right)^n\leqslant\frac{a\alpha^n+b\beta^n+c\gamma^n}{a+b+c}<\frac{\pi^n}{2}$.

说明 $b=c$, $a\to 2c$, 则 $\beta=\gamma$, $\alpha\to\pi$. 这时, $\frac{a\alpha^n+b\beta^n+c\gamma^n}{a+b+c}\to\frac{\pi^n}{2}$. 故常数 $\frac{\pi^n}{2}$ 是不可改进的.

不等式的证明方法,远不止上述所列举这些. 只要我们细心观察、挖掘特征、广泛联想、大胆尝试,将代数、几何及三角等知识纵横联系起来,加以灵活地运用,能创出更巧妙的证法来.

思考交流

思考题 1 若正数 a,b,c,x,y,z 满足: $ay+bx=c$, $cx+az=b$, $bz+cy=a$, 求证:

$$\frac{x}{1-yz}+\frac{y}{1-zx}+\frac{z}{1-xy}\leqslant 2. \qquad ①$$

证明 易得 $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$y=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，$z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

可视 a,b,c 为$\triangle ABC$的三边，则 $x=\cos A$，$y=\cos B$，$z=\cos C$，于是

$$\frac{x}{1-yz}=\frac{\cos A}{1-\cos B\cos C}.$$

由 $\cos B\cos C=\frac{1}{2}[\cos(B+C)+\cos(B-C)]\leqslant\frac{1}{2}[1+\cos(B+C)]$，得

$$1-\cos B\cos C\geqslant 1-\frac{1}{2}[1+\cos(B+C)]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\cos A>0,$$

即 $$\frac{x}{1-yz}=\frac{\cos A}{1-\cos B\cos C}\leqslant\frac{2\cos A}{1+\cos A}=\frac{2\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

$$=\frac{2(b^2+c^2-a^2)}{(b+c)^2-a^2}=2\left[1-\frac{2bc}{(b+c)^2-a^2}\right].$$

从而 $$\frac{x}{1-yz}\leqslant 2\left[1-\frac{2bc}{(b+c)^2-a^2}\right].$$

同理 $$\frac{y}{1-zx}\leqslant 2\left[1-\frac{2ca}{(c+a)^2-b^2}\right],\ \frac{z}{1-xy}\leqslant 2\left[1-\frac{2ab}{(a+b)^2-c^2}\right].$$

所以 $$\frac{x}{1-yz}+\frac{y}{1-zx}+\frac{z}{1-xy}$$

$$\leqslant 2\left[1-\frac{2bc}{(b+c)^2-a^2}\right]+2\left[1-\frac{2ca}{(c+a)^2-b^2}\right]+2\left[1-\frac{2ab}{(a+b)^2-c^2}\right].$$

以下只需证

$$2\left[1-\frac{2bc}{(b+c)^2-a^2}\right]+2\left[1-\frac{2ca}{(c+a)^2-b^2}\right]+2\left[1-\frac{2ab}{(a+b)^2-c^2}\right]\leqslant 2,$$

即证 $$\frac{bc}{(b+c)^2-a^2}+\frac{ca}{(c+a)^2-b^2}+\frac{ab}{(a+b)^2-c^2}\geqslant 1,$$

亦即 $$\frac{bc}{b+c-a}+\frac{ca}{c+a-b}+\frac{ab}{a+b-c}\geqslant a+b+c. \quad ②$$

令 $\begin{cases}a+b-c=p,\\ b+c-a=q,\\ c+a-b=r.\end{cases}$ 则不等式②

$$\Leftrightarrow\frac{(p+r)(p+q)}{p}+\frac{(q+p)(q+r)}{q}+\frac{(r+p)(r+q)}{r}\geqslant 4(p+q+r)$$

$$\Leftrightarrow\frac{rq}{p}+\frac{pr}{q}+\frac{pq}{r}\geqslant p+q+r$$

$$\Leftrightarrow r^2q^2+p^2r^2+q^2p^2\geqslant p^2qr+q^2pr+r^2pq. \quad ③$$

事实上 $\frac{r^2q^2+p^2r^2}{2}\geqslant r^2pq$，$\frac{p^2r^2+q^2p^2}{2}\geqslant p^2qr$，$\frac{q^2p^2+r^2q^2}{2}\geqslant q^2pr$.

将上面三个不等式相加，可知不等式③成立.

思考题2 （第64届普特兰数学竞赛试题）设 $a,b,c;A,B,C$ 都是实数，$a\neq0$，$A\neq0$，且对任意实数 x，都有

$$|ax^2+bx+c|\leqslant|Ax^2+Bx+C|,$$

证明：$|b^2-4ac|\leqslant|B^2-4AC|$.

证明 注意到，在条件中取 x 充分大，可知 $|a|\leqslant|A|$. 下面分两种情形讨论.

情形一，$B^2-4AC>0$，此时 $Ax^2+Bx+C=0$ 有两个不同的根 x_1,x_2，由条件，可知 x_1，x_2 也必须是 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，所以 $b^2-4ac>0$，

并且 $$B^2-4AC=A^2(x_1-x_2)^2\geqslant a^2(x_1-x_2)^2=b^2-4ac.$$

情形二，$B^2-4AC\leqslant0$，不妨设 $A\geqslant a>0$，则对一切实数 x，均有 $Ax^2+Bx+C\geqslant ax^2+bx+c\geqslant0$，即 $(A-a)x^2+(B-b)x+(C-c)\geqslant0$，所以 $(B-b)^2\leqslant4(A-a)(C-c)$. 类似地，对任意实数 x，有 $(A+a)x^2+(B+b)x+(C+c)\geqslant0$，故 $(B+b)^2\leqslant4(A+a)(C+c)$. 这样，我们有 $(B^2-b^2)^2\leqslant16(A^2-a^2)(C^2-c^2)$，故

$$\begin{aligned}B^2-b^2&\leqslant|B^2-b^2|\leqslant4\sqrt{A^2C^2+a^2c^2-(A^2c^2+a^2C^2)}\\&\leqslant4\sqrt{(AC)^2+(ac)^2-2ACac}=4|AC-ac|.\end{aligned}$$

结合前面的条件，可知 $C-c\geqslant0$，$C+c\geqslant0$，即 $C\geqslant|c|$，又 $A\geqslant a>0$，

从而，有 $B^2-b^2\leqslant4(AC-ac)$，即 $4ac-b^2\leqslant4AC-B^2$.

另一方面，$B^2+b^2=\frac{1}{2}((B-b)^2+(B+b)^2)\leqslant2((A-a)(C-c)+(A+a)(C+c))=4(AC+ac)$，即 $b^2-4ac\leqslant4AC-B^2$.

结合上述两方面，知 $|b^2-4ac|\leqslant4AC-B^2$.

所以，命题成立.

同步检测3

1. （2002年湖南省高中数学竞赛试题）若二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 $a\in\mathbf{N}^*$，$c\geqslant1$，$a+b+c\geqslant1$，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个小于1的不等正根，则 a 的最小值为 （　　）

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

2. （第15届“希望杯”数学邀请赛试题）当 $x\in[0,1]$ 时，函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的值的绝对值均不超过1，则 $|a|+|b|+|c|$ 的最大值是 （　　）

A. 3　　B. 9　　C. 17　　D. 19

3. 若对任意的长方体 A，都存在一个与 A 等高的长方体 B，使得 B 与 A 的侧面积之比和体积之比都等于 λ，则 λ 的取值范围是 ( )

A. $\lambda>0$ B. $0<\lambda\leqslant1$ C. $\lambda>1$ D. $\lambda\geqslant1$

4.（第 8 届"希望杯"试题）$s=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10^6}}$，则 s 的整数部分是 ( )

A. 1997 B. 1998 C. 1999 D. 2000

5. 已知实数 a、b、c，且 $a>100$，则使得关于整数 x 的不等式 $|ax^2+bx+c|\leqslant50$ 成立时，x 的个数为 ( )

A. 恰有 1 个 B. 最多两个 C. 零个 D. 无数多个

6. 已知 $2n$ 个正实数 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$ 且 $0\leqslant\lambda\leqslant2$，令

$$M=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2-\lambda a_ib_i},\ N=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_{i+1}^2+b_i^2-\lambda a_{i+1}b_i},$$

其中，$a_{n+1}=a_1$. 则 M、N 的大小关系是 ( )

A. $M\geqslant N$ B. $M\leqslant N$ C. 随 λ 而确定 D. 完全不确定

7. 若 $x,y>0$，且 $x+2y=1$，则 $u=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{4y}\right)$ 的最小值是________.

8. 设有 n 个实数，满足 $|x_i|<1(i=1,\cdots,n)$，$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\geqslant19+|x_1+\cdots+x_n|$. 则 n 的最小值是________.

9. 设 a、b、c 为非负实数. 则代数式

$$s=\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}+\sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}}+\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}}$$

的最小值是________，最大值是________.

10. 设 $S_n=1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{k_n}}$，其中 $k_n=\frac{n(n+1)}{2}(n\in\mathbf{N}_+)$，记 T_0 是满足不等式 $S_{2006}>T$ 的最大整数 T，则在 2006，2008，1006，1005 这四个数中，与 T_0 最接近的是________.

11.（2006 年陕西省高中数学竞赛试题）已知 x，y，z 均为正数，且 $x+y+z\geqslant xyz$，求证：$\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\geqslant\sqrt{3}$.

12.（第 32 届美国数学奥林匹克试题）设 a、b、c 是正实数. 证明：

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leqslant8.$$

13.（《数学通报》2007 年第 2 期数学问题）已知 $x,y,z\in\mathbf{R}_+$，$n\in\mathbf{N}^*$，

求证：$\frac{x}{nx+y+z}+\frac{y}{x+ny+z}+\frac{z}{x+y+nz}\leqslant\frac{3}{n+2}$.

14. 求证：$x^4-12x^3+68x^2-192x+207\geqslant 0$.

15. 设 $x,y,z>0$，求证：$\dfrac{(x+y-z)^2}{(x+y)^2+z^2}+\dfrac{(y+z-x)^2}{(y+z)^2+x^2}+\dfrac{(z+x-y)^2}{(z+x)^2+y^2}\geqslant\dfrac{3}{5}$. (1)

16. 设 a,b,c 均为正数，求证：$\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}>2$.

17. 若 a,b,c 为不大于 1 的正数，n 为正整数，则

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+a}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1+b}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1+c}}\leqslant\frac{3}{\sqrt[n]{1+\sqrt[3]{abc}}}.$$

18. 集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$0<a_i<a_{i+1}(i=1,2,3)$. 试问：在集合 A 中，是否一定存在两个元素 x、y，使不等式 $(2+\sqrt{3})|x-y|<(x+1)(y+1)+xy$ 成立？若存在，请给出证明；若不存在，说明理由.

19. 设 $m,n\in\mathbf{N}^*$，$f(n)=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.

求证：(1) 若 $n>m$，则 $f(n)-f(m)\geqslant\dfrac{n-m}{n}$；

(2) 若 $n>1$，则 $f(2^n)>\dfrac{n+2}{2}$.

20. 设$\triangle ABC$及$\triangle A_1B_1C_1$ 的边长分别为 a,b,c 及 a_1,b_1,c_1，面积分别为$\triangle$及$\triangle_1$. 求证：佩多(Pedoe)不等式

$$a^2(b_1^2+c_1^2-a_1^2)+b^2(c_1^2+a_1^2-b_1^2)+c^2(a_1^2+b_1^2-c_1^2)\geqslant 16\triangle\triangle_1. \quad (1)$$

问等号何时成立.

21. (2003 年湖南省数学竞赛试题)已知 a,b,c 均为正数，且 $a+b+c=1$. 求证：

$$\frac{a(3a-1)}{1+a^2}+\frac{b(3b-1)}{1+b^2}+\frac{c(3c-1)}{1+c^2}\geqslant 0.$$

22. (第 2 届中国东南地区数学奥林匹克试题)设 $0<\alpha、\beta、\gamma<\dfrac{\pi}{2}$，且 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$. 求证：$\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma\geqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

23. (2004 年湖南省高中数学竞赛试题)已知三棱锥 $O-ABC$ 的三条侧棱 OA、OB、OC 两两垂直，P 是底面$\triangle ABC$ 内的任一点，OP 与三侧面所成的角分别为 α、β、γ. 求证：$\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta+\gamma\leqslant 3\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

24. 已知 x、y 为满足 $x+y=1$ 的正数，n 为不小于 2 的整数. 求证：$\dfrac{x^n}{x+y^3}+\dfrac{y^n}{x^3+y}\geqslant\dfrac{2^{4-n}}{5}$.

25.（1997 年 IMO 试题）对于每个正整数 n，将 n 表示成 2 的非负整数次方的和. 令 $f(n)$ 为正整数 n 的不同表示法的个数.

如果两个表示法的差别仅在于它们中各个数相加的次序不同，这两个表示法就被视为是相同的. 例如，$f(4)=4$，因为 4 恰有下列四种表示法：

$$4;2+2;2+1+1;1+1+1+1.$$

求证：对于任意整数 $n\geqslant 3$，$2^{\frac{n^2}{4}}<f(2^n)<2^{\frac{n^2}{2}}$.

第4讲　平均值不等式

第1节　二元和三元的算术—几何平均值不等式

知识点金

1. n个数的算术平均数是指$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

2. n个数的几何平均数是指$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$(有意义的前提下).

3. 两个重要不等式

如果$a,b\in\mathbf{R}$,那么$a^2+b^2\geqslant 2ab$,其中当且仅当$a=b$时取等号.

如果$a,b\in\mathbf{R}^+$,那么$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$,其中当且仅当$a=b$时取等号.

以上不等式称为二元均值不等式.它有如下变形:

$$ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}\ (a、b\in\mathbf{R}),\ ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a、b\in\mathbf{R})$$

4. 三元均值不等式

三个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.即$a,b,c\in\mathbf{R}^+$,有$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$,其中当且仅当$a=b=c$时取等号.

以上三元均值不等式有如下变形:

$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc\ (a、b、c\in\mathbf{R}^+)$$

$$abc\leqslant\frac{a^3+b^3+c^3}{3}(a、b、c\in\mathbf{R}^+),\ abc\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3(a、b、c\in\mathbf{R}^+)$$

5. 均值不等式的拓展

若 a,b,c 都是正数，则有 $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$；

$$\frac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}\leqslant\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

等号成立的条件分别是 $a=b$ 及 $a=b=c$.

其中 $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$，$\dfrac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$ 称为调和平均数.

算术一几何平均值不等式是高中数学解题的重要工具，特别是二、三元均值不等式，无论是在高考，还是在竞赛中都有着广泛的用途. 不仅要会正用、逆用，还要学会变用、活用，并能跨学科应用.

例题精析

例 1 若 x、y 是正数，则 $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2x}\right)^2$ 的最小值是（　　）

A. $4\sqrt{2}$　　B. $2+2\sqrt{2}$　　C. $3+2\sqrt{2}$　　D. $6\dfrac{1}{4}$

解 $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2x}\right)^2=\left(x^2+\dfrac{1}{4x^2}\right)+\left(\dfrac{2x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+\left(y^2+\dfrac{1}{y^2}\right).$

由 $x>0$，$y>0$，得

$$x^2+\frac{1}{4x^2}\geqslant 2\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{4x^2}}=1; \tag{1}$$

$$\frac{2x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=2\sqrt{2}; \tag{2}$$

$$y^2+\frac{1}{y^2}\geqslant 2\sqrt{y^2\cdot\frac{1}{y^2}}=2; \tag{3}$$

(1)+(2)+(3)，得 $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2x}\right)^2\geqslant 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}.$　(4)

等号成立当且仅当(1)、(2)、(3) 均以等式成立. 即 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y=1$ 时不等式(4) 取等号. 故正确答案为 C.

说明 利用放缩法求函数最值，一定要验证每个不等式等号能同时取到.

本题可推广到较为一般的形式：

若 x、y 是正数，a、b、c、d 为正常数，求 $\left(ax+\frac{b}{y}\right)^2+\left(cy+\frac{d}{x}\right)^2$ 的最小值.

求解方法与上述类似，略去. 答案：最小值为 $2(\sqrt{ad}+\sqrt{bc})^2$（当且仅当 $x=\sqrt{\frac{d}{a}}$，$y=\sqrt{\frac{b}{c}}$ 时取等号）.

例 2 （第十七届全苏数学奥林匹克九年级试题）长方形的一边长为 1cm，已知它被两条相互垂直的直线分成四个小长方形，其中三个的面积不小于 1cm^2，第四个的面积不小于 2cm^2. 问原长方形另一边至少要多长？

解 设小长方形的边长如图 4－1－1 所示，则

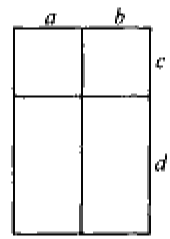


图 4－1－1

$$\begin{cases}a+b=1,\\ac\geqslant 1,\\ad\geqslant 1,\\bc\geqslant 1,\\bd\geqslant 2.\end{cases}$$

要求 $c+d$ 的最小值，由题设

$$c+d=(a+b)(c+d)=ac+bd+ad+bc\geqslant 1+2+2\sqrt{ac\cdot bd}\geqslant 3+2\sqrt{2}.$$

当 $a=\sqrt{2}-1$，$b=2-\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2}+1$，$d=2+\sqrt{2}$ 时等号成立.

所以另一边至少为 $3+2\sqrt{2}$.

例 3 已知 $a>0$，$b=\frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right)$，$c=\frac{1}{2}\left(b+\frac{3}{b}\right)$，比较 a、b、c 的大小.

分析 从结构上我们当然立即想到了平均值不等式.

因为 $a>0$，故 $a+\frac{3}{a}\geqslant 2\sqrt{3}$，$b+\frac{3}{b}\geqslant 2\sqrt{3}$，等号在 $a=b=\sqrt{3}$ 时取得.

由此得到启发，$\sqrt{3}$ 是比较三者大小的分界线.

解 (1) 当 $a>\sqrt{3}$ 时，$b-a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right)-a=\frac{3-a^2}{2a}<0$，

同理 $c-b<0$，故 $a>b>c$.

(2) 当 $a=\sqrt{3}$ 时，$a=b=c$.

(3) 当 $0<a<\sqrt{3}$ 时，$b=\frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right)>\sqrt{3}$.

又 $c=\frac{1}{2}\left(b+\frac{3}{b}\right)>\sqrt{3}$，而 $b-c=b-\frac{1}{2}\left(b+\frac{3}{b}\right)=\frac{b^2-3}{2b}>0$，

所以 $a<c<b$.

说明 二元的平均值不等式还有如下很有用的变形：

对 $b>0$，有 $\frac{a^2}{b}\geqslant 2a-b$.

对 $ab^2>0$，有 $\frac{a}{b^2}\geqslant\frac{2}{b}-\frac{1}{a}$.

对实数 a,b，有 $a(a-b)\geqslant b(a-b)$.

对 $a>0$，有 $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$.

对 $a>0$，$a-1\geqslant 1-\frac{1}{a}$.

对实数 a,x，有 $x^2\geqslant 2ax-a^2$.

对实数 a,b 及 $\lambda\neq 0$，有 $ab\leqslant\frac{1}{2}\left(\lambda^2a^2+\frac{b^2}{\lambda^2}\right)$.

例 4 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，$a+2b+c=2$，且 $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$，求证：

$$(a+b)^{\frac{1}{\lambda}}+(b+c)^{\frac{1}{\lambda}}\geqslant 2(a+b)(b+c).$$

证明 如果令 $x=(a+b)^{\frac{1}{\lambda}}$，$y=(b+c)^{\frac{1}{\lambda}}$，那么问题等价于：

设 $x,y\in\mathbf{R}^+$，$x^\lambda+y^\lambda=2$，且 $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$，则 $x+y\geqslant 2(xy)^\lambda$. (1)

由二元均值不等式，得 $2=x^\lambda+y^\lambda\geqslant 2\sqrt{(xy)^\lambda}$，即 $0<xy\leqslant 1$，而 $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$，所以有

$$(xy)^{\frac{1}{2}}\geqslant(xy)^\lambda.$$

于是，应用二元均值不等式，得

$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}\geqslant 2(xy)^\lambda$. 这就证明了(1)式.

说明 巧妙的换元，就将原来的问题变得简单了，从而也使其证明十分简明.

例 5 设 $a,b,c,d>0$，证明不等式 $\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{abcd}$.

证明 不影响结论的一般性，可认为 $ab+cd\geqslant ad+bc$，而此时 $ab+cd\geqslant\frac{1}{2}(ab+cd+ad+bc)=\frac{1}{2}(a+c)(b+d)$，由此得 $\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)(b+d)}\geqslant\frac{ad+bc}{2}$. (1)

对于数 ad 和 bc，应用平均值不等式得 $\frac{ad+bc}{2}\geqslant\sqrt{abcd}$. (2)

由(1)(2)得 $\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{abcd}$.

例 6 已知锐角 α、β、γ 满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，求证 $\cot\alpha\cot\beta+\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha\leqslant\frac{3}{2}$.

分析 由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，得到 α、β、γ 的更直接、更明了的关系 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\sin^2\gamma$，这是平方关系，而要证明的式子的左边是乘积和的形式，恰好可通过 $2ab\leqslant a^2+b^2$ 实现对接.

证明 因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，

所以 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\sin^2\gamma$，$\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\sin^2\alpha$，$\cos^2\gamma+\cos^2\alpha=\sin^2\beta$.

又因为 $\cot\alpha\cot\beta=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha}\leqslant\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}\right)^2+\left(\dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha}\right)^2\right]$，

同理，$\cot\beta\cot\gamma\leqslant\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\cos\beta}{\sin\gamma}\right)^2+\left(\dfrac{\cos\gamma}{\sin\beta}\right)^2\right]$，$\cot\gamma\cot\alpha\leqslant\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\gamma}\right)^2+\left(\dfrac{\cos\gamma}{\sin\alpha}\right)^2\right]$，

所以 $\cot\alpha\cot\beta+\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha\leqslant\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{\sin^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\gamma+\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}+\dfrac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}{\sin^2\gamma}\right]$

$=\dfrac{3}{2}$.

说明 充分挖掘已知和目标之间的直接关系，剔除中间环节，实现了已知和目标的直接链接，使证题方向明确，过程清晰.

例 7 已知 a_1、a_2、a_3、$a_4\in\mathbf{R}^+$，且 $a_1+a_2+a_3+a_4=1$，$M=\sqrt[3]{7a_1+1}+\sqrt[3]{7a_2+1}+\sqrt[3]{7a_3+1}+\sqrt[3]{7a_4+1}$，求证：$5<M<6$.

证明 由条件知，$0<a_1<1$，故 $a_1>a_1^2>a_1^3$，

所以 $7a_1+1=a_1+3a_1+3a_1+1>a_1^3+3a_1^2+3a_1+1=(a_1+1)^3$.

$\sqrt[3]{7a_1+1}>a_1+1$.

又因为 $\sqrt[3]{(7a_1+1)\cdot\dfrac{11}{4}\cdot\dfrac{11}{4}}\leqslant\dfrac{1}{3}\left[(7a_1+1)+\dfrac{11}{4}+\dfrac{11}{4}\right]=\dfrac{7}{3}a_1+\dfrac{13}{6}$.

由此得
$$a_1+1<\sqrt[3]{7a_1+1}\leqslant\left(\frac{7a_1}{3}+\frac{13}{6}\right)\sqrt[3]{\left(\frac{4}{11}\right)^2}.$$

同理，$a_2+1<\sqrt[3]{7a_2+1}\leqslant\left(\dfrac{7a_2}{3}+\dfrac{13}{6}\right)\sqrt[3]{\left(\dfrac{4}{11}\right)^2}$，

$a_3+1<\sqrt[3]{7a_3+1}\leqslant\left(\dfrac{7a_3}{3}+\dfrac{13}{6}\right)\sqrt[3]{\left(\dfrac{4}{11}\right)^2}$，

$a_4+1<\sqrt[3]{7a_4+1}\leqslant\left(\dfrac{7a_4}{3}+\dfrac{13}{6}\right)\sqrt[3]{\left(\dfrac{4}{11}\right)^2}$.

将上面四式相加，并注意到 $a_1+a_2+a_3+a_4=1$，得
$$1+4<M\leqslant\left(\frac{7}{3}+\frac{26}{3}\right)\sqrt[3]{\left(\frac{4}{11}\right)^2}=\sqrt[3]{176}.$$

因为 $176<6^3$，所以 $5<M<6$.

例 8 足球比赛场地的宽为 a 米，球门的宽为 b 米. 在足球比赛中，甲方边锋带球过人沿边

线直接向前推进，试问该边锋在距乙方底线多远处起脚射门，能使命中角最大，并求出最大角.

解 如图 4-1-2，设 O 是边线与乙方底线的交点，A、B 是球门两柱脚，O_1 是 AB 的中点. 由题设知

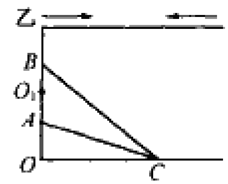


图 4-1-2

$$|OA|=\frac{1}{2}(a-b),\ |OB|=\frac{1}{2}(a+b),$$

设 C 为起脚射门点，$\angle ACB=\alpha$，$|OC|=x$，则

$$\tan\angle OCB=\frac{\frac{1}{2}(a+b)}{x},$$

$$\tan\angle OCA=\frac{\frac{1}{2}(a-b)}{x},\alpha=\angle OCB-\angle OCA,$$

所以 $\tan\alpha=\tan(\angle OCB-\angle OCA)$

$$=\frac{\tan\angle OCB-\tan\angle OCA}{1+\tan\angle OCB\cdot\tan\angle OCA}=\frac{\frac{\frac{1}{2}(a+b)}{x}-\frac{\frac{1}{2}(a-b)}{x}}{1+\frac{\frac{1}{2}(a+b)}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}(a-b)}{x}}$$

$$=\frac{b}{x+\frac{\frac{1}{4}(a^2-b^2)}{x}}\leqslant\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

当且仅当 $x=\frac{\frac{1}{4}(a^2-b^2)}{x}$，即 $x=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}$ 时取等号.

因此，该边锋在距乙方底线的 $\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}$ 米处起脚射门，能使命中角最大，最大角为

$$\arctan\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

例 9 （第 64 届普特兰数学竞赛试题）求下述代数式的最小值：

$|\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x|$，其中 x 为实数.

解
$$f(x)=\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x$$
$$=\sin x+\cos x+\frac{1}{\sin x\cos x}+\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}.$$

记 $t=\sin x+\cos x$，则 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$，这里 $|t|\leqslant\sqrt{2}$，且 $|t|\neq 1$.

$$f(x)=t+\frac{2}{t^2-1}+\frac{2t}{t^2-1}=t+\frac{2}{t-1}=t-1+\frac{2}{t-1}+1.$$

当 $t>1$ 时，$t-1+\dfrac{2}{t-1}\geqslant 2\sqrt{2}$，此时 $f(x)\geqslant 1+2\sqrt{2}$（事实上，等号不能取到，因为等号当 $t=1+\sqrt{2}$ 时成立，已超过 t 的范围）.

当 $t<1$ 时，$-f(x)=-1+(1-t)+\dfrac{2}{1-t}\geqslant -1+2\sqrt{2}$（等号在 $t=1-\sqrt{2}$ 时取到）. 这些讨论表明 $|f(x)|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}-1$.

例 10 设 $a、b、c\in\mathbf{R}^{+}$，且 $a^2+b^2+c^2=1$. 求证：$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\geqslant\dfrac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}+3$.

证明 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\geqslant\dfrac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}+3$

$\Leftrightarrow\dfrac{1-a^2}{a^2}+\dfrac{1-b^2}{b^2}+\dfrac{1-c^2}{c^2}\geqslant\dfrac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$

$\Leftrightarrow\dfrac{(a^2+b^2+c^2)-a^2}{a^2}+\dfrac{(a^2+b^2+c^2)-b^2}{b^2}+\dfrac{(a^2+b^2+c^2)-c^2}{c^2}\geqslant\dfrac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$

$\Leftrightarrow\dfrac{b^2+c^2}{a^2}+\dfrac{a^2+c^2}{b^2}+\dfrac{a^2+b^2}{c^2}\geqslant\dfrac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$ ①

$\Leftrightarrow b^2c^2(b^2+c^2)+a^2c^2(a^2+c^2)+a^2b^2(a^2+b^2)\geqslant 2abc(a^3+b^3+c^3)$.

由均值不等式得

$b^4c^2+b^4a^2\geqslant 2\sqrt{b^4c^2\cdot b^4a^2}=2ab^4c$,

$b^2c^4+a^2c^4\geqslant 2\sqrt{b^2c^4\cdot a^2c^4}=2abc^4$,

$a^4c^2+a^4b^2\geqslant 2\sqrt{a^4c^2\cdot a^4b^2}=2a^4bc$.

将以上三个不等式相加得

$$b^2c^2(b^2+c^2)+a^2c^2(a^2+c^2)+a^2b^2(a^2+b^2)\geqslant 2abc(a^3+b^3+c^3).$$

因此，所证不等式成立.

说明 本题待证的不等式为非齐次不等式. 先利用条件“$1=a^2+b^2+c^2$”，将其转化为齐次不等式①，再利用均值不等式使问题获解.

例 11 求证：$n^n>1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$.

证明 右端首尾对应两项相加，由均值不等式且将其两端平方得 $\left[\dfrac{1+(2n-1)}{2}\right]^2>1\cdot(2n-1)$ 即 $n^2>1\cdot(2n-1)$

同理 $\left[\dfrac{3+(2n-3)}{2}\right]^2>3\cdot(2n-3)$ 即 $n^2>3\cdot(2n-3)$,

$\left[\dfrac{5+(2n-5)}{2}\right]^2>5\cdot(2n-5)$ 即 $n^2>5\cdot(2n-5)$,

……

$$\left[\frac{(2n-1)+1}{2}\right]^2 > (2n-1)\cdot 1 \text{ 即 } n^2 > (2n-1)\cdot 1,$$

上述各个同向不等式相乘，则可得 $n^n > 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$.

说明 类似地，我们可以证明，当 $m>0$，$n>0$，m 与 n 不同时为 1 时，成立

$$(m+1)(m+2)(m+3)\cdots(m+2n-1) < (m+n)^{2n-1}.$$

例 12 设 $a,b,c,d>0$，证明不等式

$$\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{cd}\leqslant\sqrt[3]{(a+b+c)(b+c+d)}.$$

证明 根据平均值不等式，当 $x,y,z>0$ 时，$\sqrt[3]{xyz}\leqslant\frac{x+y+z}{3}$，

令 $x=\frac{a}{a+b+c}$，$y=\frac{b+c}{b+c+d}$，$z=\frac{b}{b+c}$，则有

$$\sqrt[3]{\frac{ab}{(a+b+c)(b+c+d)}}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{b}{b+c}\right), \tag{1}$$

令 $x=\frac{b+c}{a+b+c}$，$y=\frac{d}{b+c+d}$，$z=\frac{c}{b+c}$，则有

$$\sqrt[3]{\frac{cd}{(a+b+c)(b+c+d)}}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{d}{b+c+d}+\frac{c}{b+c}\right). \tag{2}$$

不等式(1)，(2)两边分别相加得

$$\sqrt[3]{\frac{ab}{(a+b+c)(b+c+d)}}+\sqrt[3]{\frac{cd}{(a+b+c)(b+c+d)}}\leqslant 1,$$

此不等式两边分别乘 $\sqrt[3]{(a+b+c)(b+c+d)}$ 得

$$\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{cd}\leqslant\sqrt[3]{(a+b+c)(b+c+d)}.$$

例 13 (《数学通报》2003 年第 10 期) 设 $m\in\mathbf{N}^*$，$x,y,z\in\mathbf{R}_+$，且 $xyz=1$，求证：

$$\frac{x^m}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^m}{(1+x)(1+z)}+\frac{z^m}{(1+x)(1+y)}\geqslant\frac{3}{4}. \tag{1}$$

证明 $\frac{x^m}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^m}{(1+x)(1+z)}+\frac{z^m}{(1+x)(1+y)}\geqslant\frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow\frac{x^m(1+x)+y^m(1+y)+z^m(1+z)}{(1+x)(1+y)(1+z)}\geqslant\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^m+y^m+z^m+x^{m+1}+y^{m+1}+z^{m+1}\geqslant\frac{3}{4}(1+x)(1+y)(1+z). \tag{2}$$

令 $a=\frac{x+y+z}{3}$，由 $xyz=1$，得 $a=\frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}=1$，

所以 $a^{m+1}\geqslant a^m$.

因为 m 为正整数，所以 $x^m+y^m+z^m\geqslant 3\cdot\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^m=3a^m$.

所以(2) 的左边 $\geqslant 3a^m+3a^{m+1}\geqslant 3a^{m-1}+3a^m\geqslant\cdots\geqslant 3a+3a^2$. (＊)

由于 $xy+yz+zx\leqslant 3\cdot\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2=3a^2$，

所以(2) 的右边 $=\frac{3}{4}(1+x+y+z+xy+yz+zx+xyz)\leqslant\frac{3}{4}(2+3a+3a^2)$.

所以只须证：$3a^2+3a\geqslant\frac{3}{4}(3a^2+3a+2)\Leftrightarrow a^2+a-2\geqslant 0$

$\Leftrightarrow(a+2)(a-1)\geqslant 0$.

因为 $a\geqslant 1$，所以最后一个不等式成立，故(1)成立.

说明 本题(＊)处用的是递推法.

例 14 (第十四届“希望杯”培训题)设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$ 且 $x+y+z=1$，求证：

$$x^2+y^2+z^2+2\sqrt{3xyz}\leqslant 1.$$

分析 这是一道难度稍大的好题，在这里我们要对上述不等式作出一般性研究，即：在已知条件下求 $x^2+y^2+z^2+\lambda\sqrt{xyz}$ 的取值范围，其中变参数 $\lambda\geqslant 2\sqrt{3}$.

证明 利用 $x+y+z=1$，可得

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+z^2+\lambda\sqrt{xyz}=1-2(xy+yz+zx)+\lambda\sqrt{xyz}\\
=&1-2\sqrt{(xy+yz+zx)^2}+\lambda\sqrt{xyz}=1-2\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz}+\lambda\sqrt{xyz}\\
\leqslant&1-2\sqrt{xy\cdot yz+yz\cdot zx+zx\cdot xy+2xyz}+\lambda\sqrt{xyz}\\
=&1-2\sqrt{3xyz}+\lambda\sqrt{xyz}\\
=&1+(\lambda-2\sqrt{3})\sqrt{xyz}.
\end{aligned}$$

当 $\lambda-2\sqrt{3}\geqslant 0$ 即 $\lambda\geqslant 2\sqrt{3}$ 时，有

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+z^2+\lambda\sqrt{xyz}\\
\leqslant&1+(\lambda-2\sqrt{3})\sqrt{xyz}\\
\leqslant&1+(\lambda-2\sqrt{3})\sqrt{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3}\\
\leqslant&1+(\lambda-2\sqrt{3})\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}\lambda}{9}.
\end{aligned}$$

当且仅当 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时，取到最大值 $\frac{3+\sqrt{3}\lambda}{9}$.

一般地，可证：当 $0<\lambda\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$\frac{3+\sqrt{3}\lambda}{9}\leqslant x^2+y^2+z^2+\lambda\sqrt{xyz}<1$；

当$\frac{\sqrt{3}}{2}<\lambda<2\sqrt{3}$时，$\frac{1}{2}<x^2+y^2+z^2+\lambda\sqrt{xyz}<1$；

当$\lambda\geqslant 2\sqrt{3}$时，$\frac{1}{2}<x^2+y^2+z^2+\lambda\sqrt{xyz}\leqslant\frac{3+\sqrt{3}\lambda}{9}$.

留给读者自行解决.

例 15 （第 32 届 IMO 预选题）对满足 $x^2+y^2+z^2=1$ 的正数 x,y,z，求证：

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

证法 1 原不等式等价于$\frac{x^2}{x(1-x^2)}+\frac{y^2}{y(1-y^2)}+\frac{z^2}{z(1-z^2)}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$. 令 $t=x(1-x^2)$，则 $t^2=x^2(1-x^2)^2=\frac{1}{2}(2x^2)(1-x^2)(1-x^2)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2x^2+1-x^2+1-x^2}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$，

即 $t=x(1-x^2)\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

故 $\frac{x^2}{x(1-x^2)}+\frac{y^2}{y(1-y^2)}+\frac{z^2}{z(1-z^2)}\geqslant\frac{x^2}{\frac{2\sqrt{3}}{9}}+\frac{y^2}{\frac{2\sqrt{3}}{9}}+\frac{z^2}{\frac{2\sqrt{3}}{9}}=\frac{x^2+y^2+z^2}{\frac{2\sqrt{3}}{9}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

证法 2 易知 $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立. 待定系数 λ，使得

$$\frac{x}{1-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\geqslant\lambda\left(x^2-\frac{1}{3}\right),$$

整理得

$$\frac{(\sqrt{3}x-1)(x+\sqrt{3})}{2(1-x^2)}\geqslant\frac{\lambda}{3}(3x^2-1),$$

两边约去$(\sqrt{3}x-1)$，代入 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\lambda=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，所以

$$\frac{x}{1-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}\right),$$

事实上，$\frac{x}{1-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow\frac{x(\sqrt{3}x-1)^2(\sqrt{3}x+2)}{2(1-x^2)}\geqslant 0$，

这显然成立.

同理 $\frac{y}{1-y^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(y^2-\frac{1}{3}\right)$，$\frac{z}{1-z^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(z^2-\frac{1}{3}\right)$，三式相加得

$$\frac{x}{x^2-1}+\frac{y}{y^2-1}+\frac{z}{z^2-1}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

思考交流

思考题 1　在$\triangle ABC$中，D是BC边上一点，$AD\perp BC$，垂足为D，且$AD=BC=a$，求$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$的最大值.

解法 1　由于$AD=BC>BD$，$AD>CD$，所以B、C均为锐角，且$B+C>90^\circ$.

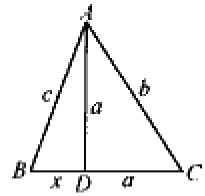


图 4－1－3

又因为$BD=a\cot B$，$CD=a\cot C$，

所以$a\cot B+a\cot C=a$，$\cot B+\cot C=1$

$\Rightarrow\sin(B+C)=\sin B\sin C$，即

$$\sin A=\sin B\sin C.$$

所以$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin^2 B+\sin^2 C}{\sin B\sin C}$

$$=\frac{1}{\sin A}\left(\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sin A}[1+\cos A\cos(B-C)]\leqslant\frac{1+\cos A}{\sin A},$$

等号当且仅当$B=C$时成立.

所以$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$的最大值是$\frac{1+\cos A}{\sin A}$.

解答错了！错在哪里？

当$B=C$时，$b=c$，D为BC中点，$\tan B=\tan C=2$，

$\frac{1+\cos A}{\sin A}=\cot\frac{A}{2}=\cot\frac{\pi-2B}{2}=\tan B=2$，又$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}}=2$，这时$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$的最大值与最小值相等，显然结论是荒谬的，原因在于角A是变量，不是常量，犹如$x^2\geqslant 2x-1$，我们不能说x^2是$2x-1$的最大值一样.

解法 2　$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=\frac{b^2+c^2}{bc}=\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}+\frac{a^2}{bc}$

$$=2\cos A+\frac{2S_\triangle}{bc}=2\cos A+\sin A=\sqrt{5}\sin(A+\varphi)\leqslant\sqrt{5}\qquad(*)$$

所以$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$的最大值为$\sqrt{5}$.

解法也错了！错在哪里？

(*)中等号成立,当且仅当 $\cos A=\frac{2}{\sqrt{5}}$,$\sin A=\frac{1}{\sqrt{5}}$,即 $\tan A=\frac{1}{2}$. 但当 $BD\neq DC$ 时,$\angle CAD$ 和 $\angle BAD$ 两者必有一个其正切大于$\frac{1}{2}$;当 $BD=DC$ 时,$\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$.

无论何种情况必有 $\tan A>\frac{1}{2}$,就是说(*)中等号不可能成立.

正确解法如下:

解 设 $\frac{b}{c}=x$,则 $f(x)=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=x+\frac{1}{x}=2+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$,当 D、C 重合时 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$,当 D、B 重合时 $x=\sqrt{2}$,故$\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\sqrt{2}$,显然,当 $x=1$ 时,$f(x)$ 取得最小值 2;当 x 从 1 增大或减小时,$\left|\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right|$都单调增大,故使得 $f(x)$ 也单调增大,可见 $f(x)$ 在$\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$递减,在$[1,\sqrt{2}]$ 递增,所以最大值在 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $x=\sqrt{2}$ 时取得.

因为 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=f(\sqrt{2})=\frac{3}{2}\sqrt{2}$,所以$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$ 的最大值是$\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

思考题 2 (2004 年中国国家队培训题)已知实数 a、b、c、x、y、z 满足

$$(a+b+c)(x-y+z)=3,\ (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=4.$$

求证:$ax+by+cz\geqslant 0$.

分析 直接证明比较困难,下面给出较自然的解题思路——整体处理法.

令 $A=ax+by+cz$,$B=ay+bz+cx$,$C=az+bx+cy$,可猜想 A、B、C 均不小于零. 事实上这是正确的.

考虑到 $A+B+C=3$,若能证明 $A^2+B^2+C^2\leqslant M$,则当 M 适当小时,会使 A、B、C 均不小于零(M 待定).

证明 若 $A^2+B^2+C^2\leqslant\frac{9}{2}$ 成立,则必有 $A\geqslant 0$,$B\geqslant 0$,$C\geqslant 0$.

事实上,若有两式小于零,不妨设 $A<0$,$B<0$,则 $C>3$.

从而,$A^2+B^2+C^2>9$,矛盾.

若只有一式小于零,不妨设 $A<0$. 则 $B+C>3$.

从而,$A^2+B^2+C^2>B^2+C^2\geqslant\frac{1}{2}(B+C)^2>\frac{9}{2}$,矛盾.

于是,只须证明 $A^2+B^2+C^2\leqslant\frac{9}{2}$.

又 $A^2+B^2+C^2$

$=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)+2(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)$

$=4+2(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)$,

故只须证明$(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)\leqslant\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow[(x+y+z)^2-x^2-y^2-z^2]\cdot[(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2]\leqslant 1$

$\Leftrightarrow(x^2+y^2+z^2)(a+b+c)^2+(x+y+z)^2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 12$

$\Leftrightarrow\frac{9(x^2+y^2+z^2)}{(x+y+z)^2}+\frac{4(x+y+z)^2}{(x^2+y^2+z^2)}\geqslant 12.$ ①

式①左边$\geqslant 2\sqrt{36}=12$，从而，结论成立.

同步检测 4-1

1. 下列不等式中，不一定成立的是 ( )

A. $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，则$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geqslant 3$　　B. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$

C. $\lg x+\log_x 10\geqslant 2$　　D. $a\in\mathbf{R}^+$，则$(a+1)\left(\frac{1}{a}+1\right)\geqslant 4$

2. 若$a、b、c\in\mathbf{R}$且$ab+bc+ca=1$，则下列不等式成立的是 ( )

A. $a^2+b^2+c^2\geqslant 2$　　B. $(a+b+c)^2\geqslant 3$

C. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 2\sqrt{3}$　　D. $abc(a+b+c)\leqslant\frac{1}{3}$

3. 某地每年消耗木材约20万m^3，每m^3价480元，为了减少木材消耗，决定按$t\%$征收木材税，这样每年的木材消耗量减少$\frac{5}{2}t$万m^3，为了既减少木材消耗又保证税金收入每年不少于180万元，则t的范围是 ( )

A. $[1,3]$　　B. $[2,4]$　　C. $[3,5]$　　D. $[4,6]$

4. 在区间$\left[\frac{1}{2},2\right]$上，函数$f(x)=x^2+px+q$与$g(x)=2x+\frac{1}{x^2}$在同一点取得相同的最小值，那么$f(x)$在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上的最大值是 ( )

A. $\frac{13}{4}$　　B. 4　　C. 8　　D. $\frac{5}{4}$

5. (第11届"希望杯"试题)已知$x,y,z\in\mathbf{R}^+$，且$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=1$，则$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}$的最小值是 ( )

A. 5　　B. 6　　C. 8　　D. 9

6. 已知$f(x)=\log_{\sin\theta}x$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，设$a=f\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}\right)$，$b=f(\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta})$，$c=$

$f\left(\dfrac{\sin2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)$，那么 a、b、c 的大小关系是 ( )

A. $a\leqslant c\leqslant b$　B. $b\leqslant c\leqslant a$　C. $c\leqslant b\leqslant a$　D. $a\leqslant b\leqslant c$

7. 设 x、y、$z>0$，且 $x+2y+3z=6$，则 xyz 的最大值是________.

8. 已知 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，$x+y+z=1$，求 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}$ 的最小值是________.

9. 设 $0<\theta<\pi$，求 $y=\sin\dfrac{\theta}{2}(1+\cos\theta)$ 的最大值是________.

10. 设实数 a、b 满足 $a=x_1+x_2+x_3=x_1x_2x_3$，$ab=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$，其中 x_1、x_2、$x_3>0$. 则 $P=\dfrac{a^2+6b+1}{a^2+a}$ 的最大值是________.

11. 设 $a,b>0$，且 $ab>2007a+2008b$，证明不等式：$a+b>(\sqrt{2007}+\sqrt{2008})^2$.

12. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，求证：$\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}>2$.

13.（第 16 届爱尔兰数学奥林匹克试题）设 T 是一个周长为 2 的三角形，a、b、c 为 T 的三边长. 证明：

(1) $abc+\dfrac{28}{27}\geqslant ab+bc+ca$；

(2) $ab+bc+ca\geqslant abc+1$.

14. 已知 $n\in\mathbf{N}$，$n>1$，求证：$\sqrt{2}+2\sqrt{3}+3\sqrt{4}+\cdots+n\sqrt{n+1}<\dfrac{1}{6}n(n+2)^2$.

15. 已知 $x,y,z>0$ 且满足 $xyz=1$，证明：

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}\right)\geqslant\frac{x+y+z}{2}\geqslant\frac{3}{2}.$$

16. 甲级足球赛期间，甲、乙两名中学生参加社会实践活动，帮助一个玩具足球商推销产品，每次在同一比赛场地外同价卖出玩具足球（随着足球赛的进程，玩具足球的价格可能不同）. 他们在小组赛、复赛和决赛期间，各推销了三次，中学生甲每次卖出玩具足球 1000 只，中学生乙每次卖出玩具足球所得款为 1000 元. 现在规定谁平均每只足球卖出所得款多，谁的推销效果好. 试判断甲、乙两个中学生谁的推销效果好？请证明你的结论.

17. 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，且 $x+y+z=1$，则有 $x^2+y^2+z^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{xyz}\geqslant\dfrac{1}{2}$.

18. 设 a、b、$c>0$，求证：$\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant\dfrac{a+b+c}{3}$.

19. 设 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$. 试证：$\sqrt[3]{\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{b}{c+a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{c}{a+b}\right)^2}\geqslant\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

20. 已知 $x,y,z>0$，且 $\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{y^2}{1+y^2}+\dfrac{z^2}{1+z^2}=2$. 求证：$\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}\leqslant\sqrt{2}$.

21.（2006年全国高中数学联合竞赛陕西省预赛试题）已知 x,y,z 均为正数.

(1) 求证：$\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$；

(2) 若 $x+y+z\geqslant xyz$，求 $u=\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}$ 的最小值.

22. 设 $a,b,c>0,a+b+c=1$，求证：$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}\leqslant\frac{3}{2}$.

23. 已知 a、b、c 是满足 $a^2=b^2+c^2$ 的正数. 求证：

$$a^3+b^3+c^3\geqslant\frac{2\sqrt{2}+1}{7}[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)].$$

24. 若 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=p$，$b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=q$，则 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)_{\max}=\sqrt{pq}$（当且仅当 $\sqrt{\frac{q}{p}}a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 时取得最大值）.

25. 若 $a_k>0(k=1,2,\cdots,n\geqslant2)$，则 $f_n=\frac{a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$ 的最大值是 $\cos\frac{\pi}{n+1}$.

第2节　n 元的平均值不等式($n\geqslant4$)

知识点金

在不等式的证明中，经常要用到一些重要不等式，平均值不等式就是其中一个.

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$，将

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\ G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

$$H_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},\ Q_n=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

分别叫做这 n 个正数的算术平均数、几何平均数、调和平均数和二次幂平均数. 有下面的平均值不等式成立.

$$H_n\leqslant G_n\leqslant A_n\leqslant Q_n \qquad ①$$

其中等号成立的充分必要条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

先证 $A_n\geqslant G_n$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号.

n 元算术—几何平均值不等式有多种证法，下面给出一种简明的数学归纳证法.

证明　① 当 $n=1$ 时，显然成立.

② 设 $n=k$ 时，$A_k \geqslant G_k$，则

$$(k-1)A_{k+1}+a_{k+1}=\underbrace{A_{k+1}+A_{k+1}+\cdots+A_{k+1}}_{k\text{个}}+a_{k+1}\geqslant k\sqrt[k]{A_{k+1}^{k-1}a_{k+1}},$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$A_{k+1}=\frac{(k-1)A_{k+1}+(k+1)A_{k+1}}{2k}=\frac{(k-1)A_{k+1}+a_{k+1}+kA_k}{2k}$$

$$\geqslant\frac{1}{2k}\left(k\sqrt[k]{A_{k+1}^{k-1}a_{k+1}}+kG_k\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[k]{A_{k+1}^{k-1}a_{k+1}}+G_k\right)$$

$$\geqslant\sqrt{\sqrt[k]{A_{k+1}^{k-1}a_{k+1}}\cdot G_k}=\sqrt[2k]{A_{k+1}^{k-1}G_{k+1}^{k+1}},$$

即有 $A_{k+1}^{k+1}\geqslant G_{k+1}^{k+1}$，也就是当 $n=k+1$ 时，$A_{k+1}\geqslant G_{k+1}$ 成立.

根据①、②得证.

由上述证明可得 $\dfrac{1}{H_n}=\dfrac{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}{n}\geqslant\sqrt[n]{\dfrac{1}{a_1}\cdot\dfrac{1}{a_2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{a_n}}=\dfrac{1}{G_n}$，

所以 $H_n\leqslant G_n$.

又因为 $a_i^2+a_j^2\geqslant 2a_ia_j\ (i\neq j)$，

所以 $(n-1)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\geqslant 2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_1a_n+a_2a_3+\cdots+a_2a_n+\cdots+a_{n-1}a_n)$，

所以 $n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$，

所以 $\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}\geqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，

即 $A_n\leqslant Q_n$.

所以平均值不等式(1)成立，且易知等号成立的充分必要条件均是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$. 关于这方面的讨论留给读者自己完成.

平均值不等式是数学中最重要的基本不等式之一，也是人们最为熟悉的不等式. 因此，它在数学的很多领域中都有着广泛的应用.

例题精析

例 1 （2002 年加拿大奥林匹克试题）设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，证明 $\dfrac{a^3}{bc}+\dfrac{b^3}{ca}+\dfrac{c^3}{ab}\geqslant a+b+c$.

证明 原不等式可化为 $a^4+b^4+c^4\geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2$. ①

不等式①右边 $=\dfrac{1}{4}(4a^2bc+4ab^2c+4abc^2)$

$$\leqslant\frac{1}{4}(a^4+a^4+b^4+c^4+a^4+b^4+b^4+c^4+a^4+b^4+c^4+c^4)$$

$=a^4+b^4+c^4$,

故原不等式成立.

例 2 求证：$1004^{2007}>2007!$.

分析 在没有使用计算器和计算机的情况下，想直接计算得到结果进行证明是极其困难的. 仔细观察，会发现 $1004=\frac{2007+1}{2}$，因此我们首先可考虑包含此问题的一般化问题，即求证 $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n>n!(n\in \mathbf{N}^*)$. 而原命题则是一般化问题当 $n=2007$ 时的特殊情形.

证明 因为 $\frac{n+1}{2}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}=\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}>\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}=\sqrt[n]{n!}$.

所以 $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n>n!$.

回到原命题，令 $n=2007$，即得 $1004^{2007}>2007!$.

说明 对于一些数值比较问题、方程问题、不等式问题、几何中的某些求解和证明问题，如果仅停留在数值计算上，或者孤立考察这些问题本身，往往难以奏效. 但如果将眼界放宽，适时运用一般化策略，构造其一般化新命题，可使特殊问题更容易解决.

例 3 设 $n\in \mathbf{N}$，且 $n>1$，$0<a<1$，求证：$1+a<\left(1+\frac{a}{n}\right)^n<\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}$.

证明 由二项式定理可知，当 $x>0$ 时，有

$$(1+x)^n>1+nx,$$

于是

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n>1+a. \tag{1}$$

同时，由 n 元算术—几何平均值不等式可得

$$\frac{1}{n+1}\Big[1+\underbrace{\left(1+\frac{a}{n}\right)+\left(1+\frac{a}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{a}{n}\right)}_{n\text{项}}\Big]>\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n+1}},$$

即

$$\frac{1}{n+1}(n+1+a)>\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}},$$

$$1+\frac{a}{n+1}>\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}. \tag{2}$$

由(1)及(2)两式即知结论成立.

用类似的方法可以证明，当 $n\in \mathbf{N}^*$，常数 $p\neq 0$ 时，$\left(p+\frac{a}{n}\right)^n<\left(p+\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}$ 成立.

说明 这类问题，如果我们巧妙地灵活利用平均值不等式，注意到数列、二项式定理等其他有关知识，可以给出简洁的证明. 一般地，在证明过程中要注意运用下列技巧：

(1) 对各项适当分组组合再利用平均值不等式放大或缩小.

(2) 一项可分成相同的或不同的项的积，利用平均值不等式放大后成为这些项的和.

(3) 一项可拆成 n 个相同的项或不同的项之和，利用平均值不等式缩小后成为这些项之积.

例如，幂可看成相同的项的积，然后放大成相同项的和，一些正分数的和，如果相异分数之间分子、分母可约分，则可缩小为乘积形式.

例 4 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}^+$，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n<1$，证明：

$$\frac{a_1a_2\cdots a_n[1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)]}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)} \leqslant \frac{1}{n^{n+1}}. \tag{1}$$

证明 令 $a_{n+1}=1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，则 $a_{n+1}>0$，故原不等式可化为

$$n^{n+1}a_1a_2\cdots a_{n+1} \leqslant (1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)(1-a_{n+1}). \tag{2}$$

对每个 $i(i=1, 2, \cdots, n+1)$，由 n 元算术—几何平均值不等式，知

$$\begin{aligned} 1-a_i &= a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_{n+1} \\ &\geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_{n+1}} = n\sqrt[n]{\frac{\prod_{i=1}^{n+1}a_i}{a_i}}. \end{aligned}$$

利用上式可得

$$\begin{aligned} &(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)(1-a_{n+1}) \\ &\geqslant n\cdot\sqrt[n]{\frac{\prod_{i=1}^{n+1}a_i}{a_1}}\cdot n\cdot\sqrt[n]{\frac{\prod_{i=1}^{n+1}a_i}{a_2}}\cdot\cdots\cdot n\sqrt[n]{\frac{\prod_{i=1}^{n+1}a_i}{a_n}}\cdot n\sqrt[n]{\frac{\prod_{i=1}^{n+1}a_i}{a_{n+1}}} = n^{n+1}a_1a_2\cdots a_{n+1}, \end{aligned}$$

知不等式(2)成立，故不等式(1)也成立.

例 5 求最大常数 k，使 $\frac{kabc}{a+b+c} \leqslant (a+b)^2+(a+b+4c)^2$ 对所有正实数 a, b, c 成立.

解 取 $a=b=2c$，有 $k\leqslant 100$. 又

$$\begin{aligned} &\frac{a+b+c}{abc}\cdot[(a+b)^2+(a+b+4c)^2] \\ &=\frac{a+b+c}{abc}\cdot[(a+b)^2+(a+2c+b+2c)^2] \\ &\geqslant\frac{a+b+c}{abc}\cdot[4ab+(2\sqrt{2ac}+2\sqrt{2bc})^2] \\ &=\frac{a+b+c}{abc}\cdot(4ab+8ac+8bc+16\sqrt{ab}\cdot c) \\ &=(a+b+c)\cdot\left(\frac{4}{c}+\frac{8}{a}+\frac{8}{b}+\frac{16}{\sqrt{ab}}\right) \end{aligned}$$

$$=\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+c\right)\cdot\left(\frac{4}{c}+\frac{8}{a}+\frac{8}{b}+\frac{8}{\sqrt{ab}}+\frac{8}{\sqrt{ab}}\right)$$

$$\geqslant\left(5\sqrt[5]{\frac{a^2b^2c}{2^4}}\right)\cdot\left(5\sqrt[5]{\frac{2^{14}}{a^2b^2c}}\right)=100.$$

故 $k_{\max}=100$.

说明 等项配置法是利用均值不等式证题的一种重要技巧.

例 6 已知 x、y、$z\in\mathbf{R}_+$，$x+y+z=1$. 求证：

$$\left(\frac{1}{x^2}-x\right)\left(\frac{1}{y^2}-y\right)\left(\frac{1}{z^2}-z\right)\geqslant\left(\frac{26}{3}\right)^3.$$

证明 注意到 $\left(\frac{1}{x^2}-x\right)\left(\frac{1}{y^2}-y\right)=\frac{(1-x^3)(1-y^3)}{x^2y^2}$

$$=(1-x)(1-y)\cdot\frac{(1+x+x^2)(1+y+y^2)}{x^2y^2}$$

$$=(1-x-y+xy)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}\right)$$

$$=(z+xy)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}\right)$$

$$=\left(\frac{z}{3}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}+xy\right)\left(1+3\times\frac{1}{3x}+9\times\frac{1}{9x^2}\right)\left(1+3\times\frac{1}{3y}+9\times\frac{1}{9y^2}\right)$$

$$\geqslant4\sqrt[4]{\left(\frac{z}{3}\right)^3xy}\cdot13\sqrt[13]{\left(\frac{1}{3x}\right)^3\left(\frac{1}{9x^2}\right)^9}\cdot13\sqrt[13]{\left(\frac{1}{3y}\right)^3\left(\frac{1}{9y^2}\right)^9}$$

$$=4\times13^2\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^3xyz^3}\cdot\sqrt[13]{\frac{1}{3^{42}x^{21}y^{21}}}=26^2\sqrt[52]{\frac{1}{3^{207}}\cdot\frac{z^{39}}{(xy)^{71}}},$$

则 $\left(\frac{1}{x^2}-x\right)\left(\frac{1}{y^2}-y\right)\geqslant26^2\sqrt[52]{\frac{1}{3^{207}}\cdot\frac{z^{39}}{(xy)^{71}}}$.

同理，$\left(\frac{1}{y^2}-y\right)\left(\frac{1}{z^2}-z\right)\geqslant26^2\sqrt[52]{\frac{1}{3^{207}}\cdot\frac{x^{39}}{(yz)^{71}}}$,

$\left(\frac{1}{z^2}-z\right)\left(\frac{1}{x^2}-x\right)\geqslant26^2\sqrt[52]{\frac{1}{3^{207}}\cdot\frac{y^{39}}{(zx)^{71}}}$.

将以上三式相乘，并由 $1=x+y+z\geqslant3\sqrt[3]{xyz}$，即 $\frac{1}{xyz}\geqslant27$，得

$$\left(\frac{1}{x^2}-x\right)^2\left(\frac{1}{y^2}-y\right)^2\left(\frac{1}{z^2}-z\right)^2\geqslant26^6\sqrt[52]{\frac{1}{3^{621}}\left(\frac{1}{xyz}\right)^{103}}$$

$$\geqslant26^6\sqrt[52]{\frac{1}{3^{621}}\times27^{103}}=\left(\frac{26}{3}\right)^6.$$

故 $\left(\frac{1}{x^2}-x\right)\left(\frac{1}{y^2}-y\right)\left(\frac{1}{z^2}-z\right)\geqslant\left(\frac{26}{3}\right)^3$.

说明 题目中未明显给出构成平均值的 n 个正数，需要作拆项、添项、变形等处理.

例 7 设 $a, b, c\in \mathbf{R}^+$，求证 $a^n+b^n+c^n\geqslant a^pb^qc^r+a^qb^rc^p+a^rb^pc^q$，其中，$n\in \mathbf{N}$，$p, q, r$ 为非负整数，且 $p+q+r=n$.

分析 此题涉及到变量 p, q, r, n. 先考察特殊情况：$p=1, q=2, r=0, n=3$. 即证明

$$a^3+b^3+c^3\geqslant ab^2+bc^2+ca^2. \tag{1}$$

此不等式关于 a, b, c 对称，不失一般性，可设 $a\geqslant b\geqslant c$，则

$$\begin{aligned}左式-右式&=a^2(a-c)+b^2(b-a)+c^2(c-b)\\&=a^2(a-b+b-c)+b^2(b-a)+c^2(c-b)\\&=(a^2-b^2)(a-b)+(a^2-c^2)(b-c)\geqslant 0,\end{aligned}$$

故不等式(1)成立.

但是此不等式的证明方法不能推广到原不等式，无助于原不等式的证明，因此应重新考虑不等式(1)具有启发性的证法. 联想到常用不等式，(1)式可利用"均值不等式"获证，即：

$ab^2=a\cdot b\cdot b=\sqrt[3]{a^3\cdot b^3\cdot b^3}\leqslant \dfrac{a^3+b^3+b^3}{3}=\dfrac{2b^3+a^3}{3}$，同理 $bc^2\leqslant \dfrac{b^3+2c^3}{3}$，$a^2c\leqslant \dfrac{2a^3+c^3}{3}$，三式相加即得不等式(1).

运用此法考虑原不等式就简单了，仿上，

$$a^pb^qc^r\leqslant \sqrt[n]{\underbrace{a^n\cdots a^n}_{p个}\cdot \underbrace{b^n\cdots b^n}_{q个}\cdot \underbrace{c^n\cdots c^n}_{r个}}\leqslant \frac{pa^n+qb^n+rc^n}{n},$$

同理，$a^qb^rc^p\leqslant \dfrac{qa^n+rb^n+pc^n}{n}$，$a^rb^pc^q\leqslant \dfrac{ra^n+pb^n+qc^n}{n}$，三式相加即得原不等式.

例 8 小王和小李是同学，又是邻居. 在每一个月里，他们总是相约到同一家小店里去买若干次白糖. 假设白糖的价格是变化的，而他们的购买方式又不一样：小王每一次总是买 1 千克白糖；小李每一次只拿 1 元钱来买白糖，而不管买多少. 试问这二种买糖方式哪一种合算？

分析 设小王和小李购 n 次白糖每千克的平均价格为 x, y，则 $x=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，

$y=\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$，比出 x, y 的大小即可，其中 a_i 为每买购买糖的单价.

解 假设小王和小李一共购买了 $n(n>1$，且 $n\in \mathbf{N})$ 次白糖，且设每次买的单价为 a_i(元/千克)，则 $i=1, 2, \cdots, n$，且 $a_i>0$. 小王每一次总是买 1 千克白糖，共花去 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 元，买得 n 千克白糖，平均每千克白糖的价格为 $x=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

小李每一次只拿 1 元钱来买白糖，共花了 n 元，每次买得的白糖数分别为 $\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \cdots,$

$\frac{1}{a_n}$千克，平均每千克白糖的价格为 $y=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$.

于是，问题转化为比较 x，y 的大小.

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\geqslant n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}=\frac{n}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}.$$

上面两个不等式相乘，得 $(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2$，

即$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$.

$x\geqslant y$，可见，除非价格稳定不变($a_1=a_2=\cdots=a_n$)，否则小李的购买方式总比小王的购买方式要合算.

例 9 函数 $y=\sin^{12}x+\cos^{12}x$ 的值域是________.

解法 1 由均值定理，知 $(\sin^4x)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^3\geqslant 3\sin^4x\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$，

$$(\cos^4x)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^3\geqslant 3\cos^4x\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2.$$

两式相加，得 $\sin^{12}x+\cos^{12}x\geqslant\frac{3}{16}(\sin^4x+\cos^4x)-\frac{1}{16}$

$$=\frac{3}{16}(1-2\sin^2x\cos^2x)-\frac{1}{16}=-\frac{3}{32}\sin^22x+\frac{1}{8}\geqslant\frac{1}{32}.$$

当 $x=\frac{\pi}{4}$时以上不等式均取等号.

故 $y_{\min}=\frac{1}{32}$.

又 $\sin x$，$\cos x\in[-1,1]$，

所以 $$y=\sin^{12}x+\cos^{12}x\leqslant\sin^2x+\cos^2x=1,$$

所以 $y_{\max}=1$.

故所求值域为$\left[\frac{1}{32},1\right]$.

解法 2 由柯西不等式，知

$$\sin^{12}x+\cos^{12}x=\frac{1}{2}(1+1)(\sin^{12}x+\cos^{12}x)\geqslant\frac{1}{2}(\sin^6x+\cos^6x)^2$$

$$=\frac{1}{2}(\sin^4x+\cos^4x-\sin^2x\cos^2x)^2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}\sin^22x\right)^2\geqslant\frac{1}{32}.$$

又由 $\sin x,\ \cos x\in[-1,\ 1]$，知 $\sin^{12}x+\cos^{12}x\leqslant\sin^2x+\cos^2x=1$，

故所求值域为 $\left[\dfrac{1}{32},\ 1\right]$.

解法 3 因为 $\sin^{12}x+\cos^{12}x=\left(\sin^{12}x+\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{64}\right)+\left(\cos^{12}x+\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{64}\right)-\dfrac{10}{64}\geqslant6\sqrt[6]{\sin^{12}x\left(\dfrac{1}{64}\right)^5}+6\sqrt[6]{\cos^{12}x\left(\dfrac{1}{64}\right)^5}-\dfrac{5}{32}=6\cdot\dfrac{1}{2^5}(\sin^2x+\cos^2x)-\dfrac{5}{32}=\dfrac{6}{32}-\dfrac{5}{32}=\dfrac{1}{32}$，又 $\sin^{12}x+\cos^{12}x\leqslant(\sin^2x+\cos^2x)^6=1$，

所以 $y\in\left[\dfrac{1}{32},\ 1\right]$.

说明 此题结论可推广到一般情形为：函数 $y=\sin^{2n}x+\cos^{2n}x(n\in\mathbf{N}_+)$ 的值域是 $[2^{1-n},\ 1]$，证明略.

例 10 若 $x_i>0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ p,\ x_{p+1}=x_1,\ p,\ m,\ n\in\mathbf{N}^*,\ n>m$，则

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{(x_i+1)^n}{x_{i+1}^m}\geqslant\frac{pn^n}{m^m(n-m)^{n-m}}.$$

证明 记 $\lambda=\dfrac{n^n}{m^{m+1}(n-m)^{n-m-1}}=\dfrac{n-m}{m}\mu$.

由均值不等式，有 $\dfrac{(x_i+1)^n}{x_{i+1}^m}+\underbrace{\lambda x_{i+1}+\cdots+\lambda x_{i+1}}_{m\text{个}}+\underbrace{\mu+\cdots+\mu}_{n-m-1\text{个}}$

$$\geqslant n\sqrt[n]{(x_i+1)^n\cdot\lambda^m\cdot\mu^{n-m-1}}$$

$$=n(x_i+1)\sqrt[n]{\frac{(n-m)^m}{m^m}\cdot\mu^m\cdot\mu^{n-m-1}}$$

$$=n(x_i+1)\sqrt[n]{\frac{(n-m)^m}{m^m}\cdot\frac{n^{n(n-1)}}{m^{m(n-1)}(n-m)^{(n-1)(n-m)}}}$$

$$=n(x_i+1)\cdot\frac{n^{n-1}}{m^m(n-m)^{n-m-1}}=(n-m)\mu(x_i+1).$$

令 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ p$，叠加得

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{(x_i+1)^n}{x_{i+1}^m}+m\lambda\sum_{i=1}^{p}x_i+p(n-m-1)\mu\geqslant(n-m)\mu\sum_{i=1}^{p}x_i+p(n-m)\mu,$$

注意到 $m\lambda=(n-m)\mu$，化简整理即得 $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{(x_i+1)^n}{x_{i+1}^m}\geqslant p\mu=\frac{pn^n}{m^m(n-m)^{n-m}}$.

取等号的充要条件是 $x_i=\dfrac{\mu}{\lambda}=\dfrac{m}{n-m},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$.

说明 通过对 $p,\ m,\ n$ 赋值，就能得到新的不等式. 如：

设 $x, y, z>0$，则 $\frac{(x+1)^4}{y^2}+\frac{(y+1)^4}{z^2}+\frac{(z+1)^4}{x^2}\geqslant 48$.

这是 $p=3$，$n=4$，$m=2$ 的特例.

例 11 （第 42 届 IMO 试题）对所有正实数 a, b, c，证明：

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1. \tag{1}$$

证明 由不等式(1)左边

$$\begin{aligned}&\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\\ =&\frac{a^{\frac{3}{2}}}{(a^3+8abc)^{\frac{1}{2}}}+\frac{b^{\frac{3}{2}}}{(b^3+8abc)^{\frac{1}{2}}}+\frac{c^{\frac{3}{2}}}{(c^3+8abc)^{\frac{1}{2}}}\geqslant\frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}}{(a^3+b^3+c^3+24abc)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

因此，要证(1)，只需证

$$\frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}}{(a^3+b^3+c^3+24abc)^{\frac{1}{2}}}\geqslant 1$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3\geqslant a^3+b^3+c^3+24abc. \tag{2}$$

将 $(a+b+c)^3$ 展开（同类项不合并），设 $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+\sum a^{q_1}b^{q_2}c^{q_3}$，其中 q_1，q_2，q_3 为小于 3 的非负整数且 $q_1+q_2+q_3=3$，则 $\sum a^{q_1}b^{q_2}c^{q_3}$ 中共有 $27-3=24$ 项，字母 a, b, c 各出现的次数为 $\frac{27\times 3}{3}-3=24$，用平均值不等式可得：$\sum a^{q_1}b^{q_2}c^{q_3}\geqslant 24\sqrt[24]{a^{24}b^{24}c^{24}}=24abc$，因此 $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+\sum a^{q_1}b^{q_2}c^{q_3}\geqslant a^3+b^3+c^3+24abc$，即(2)成立，故(1)成立.

说明 ① 可以直接将 $(a+b+c)^3$ 展开并用平均值不等式证明(1).

② 将上述证明中的 8 换成 λ 即可以证明(1)的推广：设 $a, b, c\in\mathbf{R}_+$，$\lambda\geqslant 8$，则

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}.$$

例 12 （1994 年国家数学集训队选拔考试题）已知 $5n$ 个实数 r_i，s_i，t_i，u_i，v_i 都大于 $1(1\leqslant i\leqslant n)$，记 $R=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_i$，$S=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}s_i$，$T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i$，$U=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i$，$V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_i$. 求证：$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{r_is_it_iu_iv_i+1}{r_is_it_iu_iv_i-1}\right)\geqslant\left(\frac{RSTUV+1}{RSTUV-1}\right)^n$.

证明 当 $x_i>0$ 时，由算术-几何平均值不等式得

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i+1}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i+1}, \tag{1}$$

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+1}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+1}. \tag{2}$$

(1)+(2)得$\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i+1}}+\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+1}}\leqslant 1$,

即
$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(x_i+1)}\geqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}+1. \tag{3}$$

用 x_i-1 替代(3)中的 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$,得

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}\geqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)}+1,$$

即
$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)}\leqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}-1. \tag{4}$$

(3)÷(4)得
$$\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i+1}{x_i-1}\geqslant\left(\frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i}+1}{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i}-1}\right)^n. \tag{5}$$

函数 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$,当 $x>1$ 时是减函数,取 $x_i=r_is_it_iu_iv_i(1\leqslant i\leqslant n)$,易知此时$\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i}\leqslant RSTUV$,结合(5),即得所求.

例 13 确定最小的自然数 k,使对任意 $a\in[0,1]$及任意 $n\in\mathbf{N}^*$,恒有 $a^k(1-a)^n<\frac{1}{(n+1)^3}$.

解 引入变量 λ(待定).

$$a^k[\lambda(1-a)]^n\leqslant\left[\frac{ka+n\lambda(1-a)}{n+k}\right]^{n+k}=\left[\frac{n\lambda+(k-\lambda n)a}{n+k}\right]^{n+k}.$$

令 $k-\lambda n=0$,即 $\lambda=\frac{k}{n}$,从而上述不等式变为 $a^k(1-a)^n\leqslant\frac{k^kn^n}{(n+k)^{n+k}}$. 等号当 $a=\frac{k}{n+k}$ 时取到.

所以 $a^k(1-a)^n$ 的最大值为 $\frac{k^kn^n}{(n+k)^{n+k}}$. 于是问题转化为确定最小的自然数 k,使对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 有$\frac{k^kn^n}{(n+k)^{n+k}}<\frac{1}{(n+1)^3}$.

当 $k=1,2,3$ 时不能使上式对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立(取一些特定的值检验之).

下面证明:$k\geqslant 4$ 时,$\frac{k^kn^n}{(n+k)^{n+k}}<\frac{1}{(n+1)^3}$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立,即要证:$4^4n^n(n+1)^3<(n+4)^{n+4}$.

当 $n=1$ 时，左边 $=4^4\times 2^3<5^5$，显然成立；

当 $n=2$ 时，左边 $=4^4\times 2^2\times 3^3<6^6$，显然成立；

当 $n=3$ 时，左边 $=4^4\times 3^3\times 4^3<7^7$，显然成立；

当 $n\geqslant 4$ 时，

因为 $\sqrt[n+4]{4^4n^n(n+1)^3}=\sqrt[n+4]{16(2n)^4n^{n-4}(n+1)^3}$

$$\leqslant\frac{16+8n+(n-4)n+3(n+1)}{n+4}=\frac{n^2+7n+19}{n+4}$$

$$<\frac{n^2+8n+16}{n+4}=n+4.$$

所以 $4^4n^n(n+1)^3<(n+4)^{n+4}$.

综上所述，所求 k 的最小自然数为 4.

说明 平均不等式中对于等号一时无法确定的问题，用待定系数法是比较有效的方法，这也是平均不等式中的比较深一层次的应用.

例 14 （第 64 届普特兰数学竞赛试题）设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是非负实数. 证明：$(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}+(b_1b_2\cdots b_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant((a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n))^{\frac{1}{n}}$. ①

分析 此题直接证明不好入手. 若将不等式一边变成 1，再观察新的不等式结构的特点，易得证明思路.

证明 不妨设对每个 i，都有 $a_i+b_i>0$，此时，由平均值不等式，可知

$$\left(\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n)}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+b_n}\right),$$

$$\left(\frac{b_1b_2\cdots b_n}{(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n)}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{b_n}{a_n+b_n}\right).$$

故 $\left(\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n)}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{b_1b_2\cdots b_n}{(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n)}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}(\underbrace{1+\cdots+1}_{n个})=1$，去分母即可得欲证的不等式.

说明 (1) 用数学归纳法不难将不等式①推广到更一般情形：

设 $a_{ij}>0(i=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, m)$，则

$$(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1m})(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2m})\cdots(a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nm})$$

$$\geqslant[(a_{11}a_{21}\cdots a_{n1})^{\frac{1}{n}}+(a_{12}a_{22}\cdots a_{n2})^{\frac{1}{n}}+\cdots+(a_{1m}a_{2m}\cdots a_{nm})^{\frac{1}{n}}]^n. \quad ②$$

当且仅当 $a_{11}:a_{12}:\cdots:a_{1m}=a_{21}:a_{22}:\cdots:a_{2m}=\cdots=a_{n1}:a_{n2}:\cdots:a_{nm}$ 时②取等号.

(2) 在②中令 $m=2$，a_{i1}，a_{i2} 分别用 a_i^2，$b_i^2(1\leqslant i\leqslant n)$ 替换，②即变为著名的柯西不等式：$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2$.

例 15 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-m}$ 是正实数，$m, n\in \mathbf{N}^*$，$n-m\geqslant 3$，则

$$(a_1^n-a_1^m+n-m)(a_2^n-a_2^m+n-m)\cdots(a_{n-m}^n-a_{n-m}^m+n-m)\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_{n-m})^{n-m}. \quad (1)$$

证明 当 $a_i>0(i=1, 2, \cdots, n-m)$ 时，有

$$(a_i^n-a_i^m+n-m)-(a_i^{n-m}+n-m-1)=a_i^{n-m}(a_i^m-1)-(a_i^m-1)$$
$$=(a_i^m-1)(a_i^{n-m}-1)\geqslant 0.$$

故只需证
$$\prod_{i=1}^{n-m}(a_i^{n-m}+n-m-1)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n-m}a_i\right)^{n-m}. \quad (2)$$

令 $A_i=a_i^{n-m}+n-m-1(i=1, 2, \cdots, n-m)$，由均值不等式，得以下 $n-m$ 个不等式：

$$\frac{a_1^{n-m}}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\frac{1}{A_3}+\cdots+\frac{1}{A_{n-m}}\geqslant\frac{(n-m)a_1}{\sqrt[n-m]{A_1A_2\cdots A_{n-m}}},$$

$$\frac{1}{A_1}+\frac{a_2^{n-m}}{A_2}+\frac{1}{A_3}+\cdots+\frac{1}{A_{n-m}}\geqslant\frac{(n-m)a_2}{\sqrt[n-m]{A_1A_2\cdots A_{n-m}}},$$

$$\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\frac{a_3^{n-m}}{A_3}+\cdots+\frac{1}{A_{n-m}}\geqslant\frac{(n-m)a_3}{\sqrt[n-m]{A_1A_2\cdots A_{n-m}}},$$

……

$$\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\frac{1}{A_3}+\cdots+\frac{a_{n-m}^{n-m}}{A_{n-m}}\geqslant\frac{(n-m)a_{n-m}}{\sqrt[n-m]{A_1A_2\cdots A_{n-m}}}.$$

将上述不等式的两边分别相加，得

$$\frac{A_1}{A_1}+\frac{A_2}{A_2}+\cdots+\frac{A_{n-m}}{A_{n-m}}\geqslant\frac{(n-m)(a_1+a_2+\cdots+a_{n-m})}{\sqrt[n-m]{A_1A_2\cdots A_{n-m}}},$$

约去 $n-m$，两边 $n-m$ 次方，整理，得 $A_1A_2\cdots A_{n-m}\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_{n-m})^{n-m}$.

即(2) 得证，所以(1) 得证.

说明 取 $n=5$，$m=2$，即得美国第 33 届数学奥林匹克试题.

例 16 （贝努里不等式）若 $x>0$，$r\in\mathbf{R}$，$r>1$，则 $(1+x)^r>1+rx$.

证明 当 r 为大于 1 的有理数时，令 $r=\frac{n}{m}$，其中 $m, n\in\mathbf{N}^*$，$n>m$. 不等式成为

$$(1+x)^{\frac{n}{m}}>1+\frac{n}{m}x.$$

它等价于不等式 $1+x>\left(1+\frac{n}{m}x\right)^{\frac{m}{n}}$，

或表示为 $\sqrt[n]{\left(1+\frac{n}{m}x\right)^m}<1+x$.

它的左边是 n 个数 $\underbrace{1+\frac{n}{m}x,1+\frac{n}{m}x,\cdots,1+\frac{n}{m}x}_{m个},\underbrace{1,1,\cdots,1}_{(n-m)个}$

的几何平均数，应用基本不等式 $G<A$ 得（这时等号不会成立）：

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{n}{m}x\right)^m}<\frac{\left(1+\frac{n}{m}x\right)+\left(1+\frac{n}{m}x\right)+\cdots+\left(1+\frac{n}{m}x\right)+1+1+\cdots+1}{n}$$

$$=\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n次}+\frac{n}{m}x\cdot m}{n}=\frac{n+nx}{n}=1+x.$$

所以 $(1+x)^{\frac{n}{m}}>1+\frac{n}{m}x$.

再借助于极限可知，当 r 为大于 1 的实数时，不等式仍成立.

思考交流

思考题 设 a_i、$b_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$，$m\in\mathbf{N}^*$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{m+1}}{b_i^m}\geqslant(m+1)\sum_{i=1}^{n}a_i-m\sum_{i=1}^{n}b_i,\tag{1}$$

等号当且仅当 $a_i=b_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 时成立.

证明 利用算术—几何平均值不等式，

得 $\frac{a_i^{m+1}}{b_i^m}+mb_i=\frac{a_i^{m+1}}{b_i^m}+\underbrace{b_i+\cdots+b_i}_{m个}\geqslant(m+1)\sqrt[m+1]{\frac{a_i^{m+1}}{b_i^m}\cdot(b_i)^m}=(m+1)a_i$，

所以 $\frac{a_i^{m+1}}{b_i^m}\geqslant(m+1)a_i-mb_i$，

故 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{m+1}}{b_i^m}\geqslant\sum_{i=1}^{n}[(m+1)a_i-mb_i]=(m+1)\sum_{i=1}^{n}a_i-m\sum_{i=1}^{n}b_i$.

等号当且仅当 $\frac{a_i^{m+1}}{b_i^m}=b_i$，即 $a_i=b_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 时成立.

说明 不等式(1)有如下很有用的推论：

设 a_i、$b_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$，$m\in\mathbf{N}^*$，则 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{m+1}}{b_i^m}\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{m+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^m}$ (2)

等号当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时成立.

证明 应用不等式(1)，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\dfrac{a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\right)^{m+1}}{\left(\dfrac{b_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i}\right)^{m}}\geqslant(m+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}-m\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i}=(m+1)-m=1,$$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^{m+1}}{b_i^{m}}\geqslant\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^{m+1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\right)^{m}}$，

式中等号当且仅当 $\dfrac{a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}=\dfrac{b_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i}(1\leqslant i\leqslant n)$，

即 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ 时成立.

应用不等式(1)、(2)，可以将前面已证的一些不等式问题进行推广.

① 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是正数，$m\in\mathbf{N}^*$，求证：

$$\frac{x_1^{m+1}}{x_2^{m}}+\frac{x_2^{m+1}}{x_3^{m}}+\cdots+\frac{x_{n-1}^{m+1}}{x_n^{m}}+\frac{x_n^{m+1}}{x_1^{m}}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n. \tag{3}$$

证明 应用不等式(1)，得

$$\frac{x_1^{m+1}}{x_2^{m}}+\frac{x_2^{m+1}}{x_3^{m}}+\cdots+\frac{x_{n-1}^{m+1}}{x_n^{m}}+\frac{x_n^{m+1}}{x_1^{m}}\geqslant(m+1)(x_1+x_2+\cdots+x_n)-m(x_2+x_3+\cdots+x_n+x_1)$$
$$=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

所以 $\dfrac{x_1^{m+1}}{x_2^{m}}+\dfrac{x_2^{m+1}}{x_3^{m}}+\cdots+\dfrac{x_{n-1}^{m+1}}{x_n^{m}}+\dfrac{x_n^{m+1}}{x_1^{m}}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$

当 $m=1$ 时，(3)是 1984 年全国 24 省市、自治区中学数学竞赛题.

② 已知 $a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots a_n$，为两两各不相同的正整数，求证对任何正整数 n, m，下列不等式成立：$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k^{m}}{k^{m+1}}\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}.$ (4)

证明 应用不等式(1)，我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^{m}}{k^{m+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\dfrac{1}{k}\right)^{m+1}}{\left(\dfrac{1}{a_k}\right)^{m}}\geqslant(m+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-m\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+m\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right).\tag{5}$$

又因 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是两两各不相同的正整数，故有 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$. (6)

$\Big($不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，则 $a_1\geqslant1, a_2\geqslant2, \cdots, a_n\geqslant n$，故 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\Big)$ 结合(5)、(6)，即可得 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^m}{k^{m+1}}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

当 $m=1$ 时，不等式(4)就是第 20 届国际数学竞赛试题的第五大题.

③ 设 x_i、$a_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$，$m\in\mathbf{N}^*$，求证：(a) $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i^m}\geqslant\sum_{i=1}^{n}(m+1-ma_i)x_i$, (7)

等号当且仅当 $a_i=1(1\leqslant i\leqslant n)$ 时成立.

(b) $$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i^m}\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{m+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right)^m},\tag{8}$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

证明　(a) 应用不等式(1)，得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i^m}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i)^{m+1}}{(a_ix_i)^m}\geqslant(m+1)\sum_{i=1}^{n}x_i-m\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=\sum_{i=1}^{n}(m+1-ma_i)x_i,$$

等号当且仅当 $x_i=a_ix_i$，即 $a_i=1(1\leqslant i\leqslant n)$ 时成立.

(b) 应用不等式(2)，$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i^m}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i)^{m+1}}{(a_ix_i)^m}\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{m+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right)^m},$$

等号当且仅当 $\frac{x_1}{a_1x_1}=\frac{x_2}{a_2x_2}=\cdots=\frac{x_n}{a_nx_n}$，即 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

④ 设 a_i、$x_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$，$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=s$(定值)，$m$ 是大于 1 的自然数，求 $A=a_1x_1^m+a_2x_2^m+\cdots+a_nx_n^m$ 的极小值.

解　根据不等式(2)，我们有

$$\begin{aligned}A&=a_1x_1^m+a_2x_2^m+\cdots+a_nx_n^m=\frac{(a_1x_1)^m}{a_1^{m-1}}+\frac{(a_2x_2)^m}{a_2^{m-1}}+\cdots+\frac{(a_nx_n)^m}{a_n^{m-1}}\\&\geqslant\frac{(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^m}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{m-1}}=\frac{s^m}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{m-1}}.\end{aligned}$$

故当$\frac{a_1x_1}{a_1}=\frac{a_2x_2}{a_2}=\cdots=\frac{a_nx_n}{a_n}$，即$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{s}{n}$时，A取极小值$\frac{s^m}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^{m-1}}$.

⑤ 设x_i、$y_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$，$m\in\mathbf{N}^*$，

则
$$\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+1}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^{\frac{m+1}{m}}\right)^m\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^{m+1}\tag{9}$$

证明 在不等式(2)中，令

$a_i=x_iy_i$，$b_i=y_i^{\frac{m+1}{m}}(1\leqslant i\leqslant n)$，则得$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_iy_i)^{m+1}}{\left(y_i^{\frac{m+1}{m}}\right)^m}\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^{m+1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^{\frac{m+1}{m}}\right)^m}$，

即 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{m+1}\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^{\frac{m+1}{m}}\right)^m\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^{m+1}$.

当$m=1$时，(9)变为著名的柯西(Cauchy)不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2.\tag{10}$$

因此，(9)是柯西不等式(10)的推广.

⑥ 不等式(1)可进一步推广为

设a_i、$b_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$，$\alpha>0$，则$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha+1}}{b_i^\alpha}\geqslant(\alpha+1)\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-\alpha\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$， (11)

等号当且仅当$a_i=b_i(1\leqslant i\leqslant n)$时成立.

证明 利用加权幂平均值不等式，当x_1、$x_2>0$，β_1、$\beta_2>0$且$\beta_1+\beta_2=1$时，$x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\leqslant\beta_1x_1+\beta_2x_2$，我们有$a_ib_i^\alpha=(a_i^{\alpha+1})^{\frac{1}{\alpha+1}}(b_i^{\alpha+1})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\leqslant\frac{1}{\alpha+1}a_i^{\alpha+1}+\frac{\alpha}{\alpha+1}b_i^{\alpha+1}$，

所以$(\alpha+1)a_ib_i^\alpha\leqslant a_i^{\alpha+1}+\alpha b_i^{\alpha+1}$，

两边同除以b_i^α，并移项得$\frac{a_i^{\alpha+1}}{b_i^\alpha}\geqslant(\alpha+1)a_i-\alpha b_i$.

故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha+1}}{b_i^\alpha}\geqslant(\alpha+1)\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-\alpha\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$.

若用$\frac{a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}$、$\frac{b_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i}$分别替代(11)中的$a_i$，$b_i$，就可得到(2)的推广：

设a_i、$b_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$，$\alpha>0$，则$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha+1}}{b_i^\alpha}\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^{\alpha+1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\right)^\alpha}$.

等号当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时成立.

应用推广定理及其推论,前面所举问题中$m\in\mathbf{N}^*$的条件,都可放宽为$m>0$,结论仍成立.

同步检测4－2

1. 若实数$x_i(i=1,2,\cdots,n)$满足$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=n$,则$\sum\limits_{i=1}^{n}3^{x_i}$的最小值是 (　　)

A. $9n$　　B. $3n$　　C. $\sqrt{3}n$　　D. $\sqrt[3]{3}n$

2. 若$x_i>1(i=1,2,\cdots,n)$,且互不相等,$P=\sqrt[n]{\lg x_1\cdot\lg x_2\cdots\lg x_n}$,$Q=\frac{1}{n}(\lg x_1+\lg x_2+\cdots+\lg x_n)$,$R=\lg\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$,则 (　　)

A. $R<P<Q$　　B. $P<Q<R$　　C. $Q<P<R$　　D. $P<R<Q$

3. (2003年湖南省竞赛题)已知a、b是不相等的正数,在a、b之间插入两组数:x_1,x_2,$\cdots$,x_n和y_1,y_2,$\cdots$,y_n,使a,x_1,x_2,$\cdots$,x_n,b成等差数列,a,y_1,y_2,$\cdots$,y_n,b成等比数列,并给出下列不等式:

① $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)>\sqrt{ab}+\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\right)^2$;

② $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)>\frac{a+b}{2}$;

③ $\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}<\sqrt{ab}$;

④ $\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}<\frac{a+b}{2}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\right)^2$.

那么,其中为真命题的是 (　　)

A. ①③　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

4. 已知$x_i(i=1,2,\cdots,n)$是n个互不相等的正数,则

$$A=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

$$B=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n},$$

$$C=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}-\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

的大小顺序是 (　　)

A. $A>B>C$ B. $A>C>B$ C. $B>A>C$ D. $B>C>A$

5. 当 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个互不相等的正数时，下列不等式中不成立的是 （ ）

A. $\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)>\left(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}+\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}\right)^n$

B. $\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)>\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\frac{n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\right)^n$

C. $\frac{x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}>\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$

D. $\frac{x_1^3-x_2^3}{x_1^2-x_2^2}>\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}$

6. 设 $a>b>0$，那么 $a^{2n}+\frac{1}{4b(a-b)}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的最小值是 （ ）

A. $n\sqrt[n]{n}$ B. $(n+1)\sqrt[n]{n}$ C. $\frac{n+1}{n}\sqrt[n]{n}$ D. $\frac{n+1}{n}\sqrt[n+1]{n}$

7. 设 x_1,x_2,x_3 大于 0，且 $x_1+x_2+x_3=1$，则 $x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2$ 的最大值为________.

8. 已知 $x-y=1(x>1)$，则 $k=\frac{1}{y^3}+x+1$ 的最小值为________.

9. 设函数 $f(x)=5(x+1)^2+\frac{a}{(x+1)^5}(a>0)$，当 $x\geqslant 0$，$f(x)\geqslant 24$ 时，a 的最小值为________.

10. 若 x、y、z 都大于 1，求证：$\frac{x^4}{(y-1)^2}+\frac{y^4}{(z-1)^2}+\frac{z^4}{(x-1)^2}\geqslant 48$.

11. 求证：$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\geqslant\sqrt[n]{n+1}-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

12. 已知 $a,b,c,d>0$，求证：

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geqslant\frac{2}{3}.$$

13. 数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{a_n^4+1}{5a_n}$，$n\geqslant 1$. 求证：对 $n>1$，均有 $\frac{1}{5}<a_n<2$.

14. 已知 i,m,n 是正整数，且 $1<i\leqslant m<n$.

(1) 证明 $n^iA_m^i<m^iA_n^i$；

(2) 证明 $(1+m)^n>(1+n)^m$.

15. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为正数，求证：

$$\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{x_1}{x_n}\leqslant\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n+\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n+\cdots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^n+\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^n.$$

16. 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为正数，且 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$，求证：

$$\left(1+\frac{1}{a_1^2}\right)\left(1+\frac{1}{a_2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n^2}\right)\geqslant(1+n^2)^n.$$

17. $\alpha_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)(i=1, 2, 3, \cdots, n, n \geqslant 2)$，且 $\prod_{i=1}^{n} \sin\alpha_i = a$(正常数)，求 $\prod_{i=1}^{n} \cos\alpha_i$ 的最大值.

18. 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，$m \in \mathbf{N}^*$，$m \geqslant 1$，$a$、$b \in \mathbf{R}^+$，证明：

$$\frac{a}{\cos^m\alpha}+\frac{b}{\sin^m\alpha} \geqslant \left(a^{\frac{2}{m+2}}+b^{\frac{2}{m+2}}\right)^{\frac{m+2}{2}}.$$

19. (2006 年美国数学奥林匹克试题)求所有的正整数 n，使得存在正整数 $k(k\geqslant 2)$ 及正有理数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$，满足：$a_1+a_2+\cdots+a_k=a_1a_2\cdots a_k=n$.

20. (1988 年全国高中数学联赛题)已知 a、b 为正实数，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，试证对每一个 $n\in \mathbf{N}^*$，有

$$(a+b)^n-a^n-b^n \geqslant 2^{2n}-2^{n+1}.$$

21. 给定正数 λ 和正整数 $n(n\geqslant 2)$，求最小的正数 $M(\lambda)$，使得对于所有非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有 $M(\lambda)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^n+\lambda\prod_{k=1}^{n} x_k$.

22. 设 $n \geqslant 3(n \in \mathbf{N}^*)$，$x$、$y$、$z>0$，$x+y+z=1$. 则

$$\left(\frac{1}{x^{n-1}}-x\right)\left(\frac{1}{y^{n-1}}-y\right)\left(\frac{1}{z^{n-1}}-z\right) \geqslant \left(\frac{3^n-1}{3}\right)^3.$$

23. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n>0$，且 $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{1+x_i^k}=n-1(n \geqslant 3, k \in \mathbf{N}^*$ 且 $2 \leqslant k \leqslant n)$，则

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \geqslant (n-1)^{\frac{n}{k}}.$$

24. 若 $0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<a$，$b_i\in \mathbf{R}^+(i=1, 2, \cdots, n)$，$k\in \mathbf{N}^*$，则

$$\frac{b_1^{k+1}}{x_1^k}+\frac{b_2^{k+1}}{(x_2-x_1)^k}+\cdots+\frac{b_n^{k+1}}{(a-x_{n-1})^k} \geqslant \frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n)^{k+1}}{a^k},$$

当且仅当 $a_i=\frac{ab_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$ 时取等号.

第[illegible]讲　柯西不等式

柯西(Cauchy, Augustin-Louis,1789—1857),法国数学家、力学家.1789 年 8 月 21 日生于巴黎,1857 年 5 月 23 日卒于索镇.1805 年入巴黎综合工科学校学习,两年后转到桥梁工程学校,1809 年成为工程师.1813 年放弃工程师的职业,从事理论科学研究.1816 年成为巴黎综合工科学校教授,并当选为法国科学院院士.1830 年,查理十世被逐,柯西拒绝效忠新的国王,因此失去所有职务,并流亡国外.在此期间,曾任原国王查理十世的家庭教师.1848 年恢复综合工科学校教授职务,并任巴黎大学教授.

柯西在大学期间,就开始研读拉格朗日和拉普拉斯的著作.他对数论、代数、数学分析和微分方程等多个数学领域进行了深入的研究,并获得了许多重要成果.柯西最重要的数学贡献在微积分、复变函数和微分方程等方面.他发现并阐明了级数收敛准则和一些判别法,提出关于极限论的 ε—方法,把整个极限过程用不等式描述,后来经改进形成 $\varepsilon-\delta(\varepsilon-N)$ 方法沿用至今.他还给出了如今通用的函数连续性的概念,给出定积分的第一个确切定义,以及广义积分的定义等.在复变函数论方面,他系统地总结了复数理论,探讨了柯西-黎曼条件,建立了柯西积分定理和公式,还研究了留数定理.在微分方程方面,柯西深入考察了解的存在唯一性定理等.

此外,柯西对力学和天文学也有许多贡献,著作甚丰,共出版了七部著作和 800 多篇论文,以《分析教程》(1821)和《关于定积分理论的报告》(1827)最为著名.1882 年开始出版他的全集,至 1970 年已达 27 卷之多.

知识点金

著名的柯西不等式是指:

定理　对任意实数 a_i, b_i $(i=1, 2, \cdots, n)$, $n>1$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2, \qquad ①$$

等号当且仅当 $\lambda a_i=\mu b_i$ (λ、μ 为常数, $i=1, 2, \cdots, n$)时成立.

注　当 $a_i, b_i\in \mathbf{R}-\{0\}(i=1, 2, \cdots, n)$时，等号成立的条件可改写为 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$.

上述定理中不等式①就是著名的柯西(Cauchy)不等式的一般情况.

证法 1　当 a_i 全为零时命题显然成立. 否则 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2>0$，考查函数关于 x 的二次函数 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_ix-b_i)^2$，显然 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立.

注意到 $f(x)=(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2)x^2-2(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i)x+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2$，而 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2>0$，故 $f(x)$的判别式不大于零，即

$\Delta=4(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i)^2-4\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\leqslant 0$，整理后立得.

证法 2
$$\frac{|a_i|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}}\cdot\frac{|b_i|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}+\frac{b_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}\right)$$

从而
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}}\cdot\frac{|b_i|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}\right)=1,$$

故
$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|\right)^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2.$$

证法 3
$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i^2b_j^2-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_ib_ja_j$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i^2b_j^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_j^2b_i^2-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_ja_jb_i\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i^2b_j^2-2a_ib_ja_jb_i+a_j^2b_i^2)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2\geqslant 0.$$

证法 4　(用数学归纳法证明)

当 $n=2$ 时，$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2\geqslant 0$，柯西不等式成立.

假设 $n=k$ 时，柯西不等式也成立，即 $\left(\sum\limits_{i=1}^{k}a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{k}b_i^2\right)\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{k}a_ib_i\right)^2$.

则当 $n=k+1$ 时，根据假设及 $n=2$ 时已证的结果，
$$\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1}b_i^2\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{k-1}a_i^2+\left(\sqrt{a_k^2+a_{k+1}^2}\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k-1}b_i^2+\left(\sqrt{b_k^2+b_{k+1}^2}\right)^2\right)$$
$$\geqslant\left(\sum_{i=1}^{k-1}a_ib_i+\sqrt{a_k^2+a_{k+1}^2}\cdot\sqrt{b_k^2+b_{k+1}^2}\right)^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{k-1}a_ib_i+a_kb_k+a_{k+1}b_{k+1}\right)^2$$

$\geqslant \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i\right)^2$

则说明当 $n=k+1$ 时柯西不等式也成立.

因此,对于正整数 $n(>1)$,柯西不等式恒成立.

证法 5 (向量的内积证法)

令 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角,

因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 且 $|\cos\theta|\leqslant 1$,

所以 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos\theta|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\Rightarrow|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2\leqslant|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$,

即 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$.

等号成立 $\Leftrightarrow\theta=0°$ 或 $180°\Leftrightarrow\boldsymbol{a}$ 平行 $\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}=\cdots=\dfrac{b_n}{a_n}$

证法 6 设 $A=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$, $B=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$, $C=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$

当 $C=0$ 时,柯西不等式显然成立.

当 $C\neq 0$ 时,

则 $\dfrac{AB}{C^2}+1=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^2B}{C^2}+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{b_i^2}{B}=\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{a_i^2B}{C^2}+\dfrac{b_i^2}{B}\right)\geqslant\sum_{i=1}^{n}2\dfrac{a_ib_i}{C}=2$

所以 $\dfrac{AB}{C^2}+1\geqslant 2$,即 $AB\geqslant C^2$.

证明到此告一段落,下面将介绍一些柯西不等式的几个推论.

推论 1 设 $c_i>0(i=1, 2, \cdots, n, n\in\mathbf{N}^*, n>1)$,则

$$\frac{x_1^2}{c_1}+\frac{x_2^2}{c_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{c_n}\geqslant\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{c_1+c_2+\cdots+c_n}, \qquad (\text{I})$$

等号当且仅当 $\dfrac{x_1}{c_1}=\dfrac{x_2}{c_2}=\cdots=\dfrac{x_n}{c_n}$ 时成立.

证明 在柯西不等式中,令 $a_i=\dfrac{x_i}{\sqrt{c_i}}$, $b_i=\sqrt{c_i}(i=1, 2, \cdots, n)$ 即可证得.

推论 2 设 $a_i, b_i\in\mathbf{R}^+$, $i=1, 2, \cdots, n$,则 $\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}b_i\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i}\right)^2$, (Ⅱ)

等号当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ 时成立.

证明 $\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}b_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{a_i})^2\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{b_i})^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\cdot\sqrt{b_i}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i}\right)^2$.

推论 3 $a_i>0$, $x_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$时,

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}\geqslant\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}, \qquad (\text{Ⅲ})$$

等号在 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

证明　应用柯西不等式，

$$\left(\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}\right)(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)$$

$$\geqslant\left(\sqrt{\frac{x_1}{a_1}}\cdot\sqrt{a_1x_1}+\sqrt{\frac{x_2}{a_2}}\cdot\sqrt{a_2x_2}+\cdots+\sqrt{\frac{x_n}{a_n}}\cdot\sqrt{a_nx_n}\right)^2$$

$$=(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2.$$

变形即得不等式(Ⅲ).

柯西不等式揭示了任意两组实数积之和的平方与平方和之积间的大小关系，应用它及其三个推论，可以很简单地证明许多复杂的不等式. 下面我们就用实例来说明这一点.

例题精析

例 1　设 $f(x)=\sqrt{x}$，p，$q>0$，且 $p+q=1$，求证：

$$pf(x_1)+qf(x_2)\leqslant f(px_1+qx_2).$$

证明　$pf(x_1)+qf(x_2)=p\sqrt{x_1}+q\sqrt{x_2}=\sqrt{p}\cdot\sqrt{px_1}+\sqrt{q}\cdot\sqrt{qx_2}$

$$\leqslant\sqrt{p+q}\cdot\sqrt{px_1+qx_2}=f(px_1+qx_2).$$

例 2　（首届中国东南地区数学奥林匹克试题）设实数 a、b、c 满足 $a^2+2b^2+3c^2=\frac{3}{2}$，求证：$3^{-a}+9^{-b}+27^{-c}\geqslant1$.

解　由柯西不等式，

$$(a+2b+3c)^2\leqslant[(\sqrt{1})^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2][(\sqrt{1}a)^2+(\sqrt{2}b)^2+(\sqrt{3}c)^2]=9$$

所以，$a+2b+3c\leqslant3$，所以 $3^{-a}+9^{-b}+27^{-c}\geqslant3\sqrt[3]{3^{-(a+2b+3c)}}\geqslant3\sqrt[3]{3^{-3}}=1$.

说明　柯西不等式是处理不等式问题的重要工具. 有些证明不等式的题目表面上看与柯西不等式无关，然而通过对原不等式作适当的变形改造后却可以应用柯西不等式加以解决，当然具体如何变形改造是关键，也是难点，这往往需要经过观察、直觉、猜测、推理等.

例 3　若 a、b、c 为某三角形的三边长，求证：$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geqslant3$.

证明　记 $2S=a+b+c$，由已知 $S>a$，$S>b$，$S>c$.

那么　$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}$

$$=\frac{a}{2(S-a)}+\frac{b}{2(S-b)}+\frac{c}{2(S-c)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{S-a}+1\right)+\left(\frac{b}{S-b}+1\right)+\left(\frac{c}{S-c}+1\right)-3\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{S}{S-a}+\frac{S}{S-b}+\frac{S}{S-c}\right)-\frac{3}{2}$$
$$= \frac{S}{2}\left(\frac{1}{S-a}+\frac{1}{S-b}+\frac{1}{S-c}\right)-\frac{3}{2}.$$

应用不等式(Ⅰ)，我们有

$$\frac{1}{S-a}+\frac{1}{S-b}+\frac{1}{S-c}$$
$$\geqslant \frac{9}{(S-a)+(S-b)+(S-c)}=\frac{9}{3S-(a+b+c)}=\frac{9}{S}$$

所以$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geqslant \frac{S}{2}\cdot\frac{9}{S}-\frac{3}{2}=3.$

说明　值得一提的是，用本例类似的方法，可推证许多有趣的不等式，如：

1. 若$a_1,a_2,\cdots,a_n$为n边形n条边的长，则

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\cdots+a_n-a_1}+\frac{a_2}{a_3+\cdots+a_n+a_1-a_2}+\cdots+$$
$$\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}-a_n}\geqslant\frac{n}{n-2}(n>2).$$

2. 若$a_1,a_2,\cdots,a_n$为任意正数，则

$$\frac{a_1+\cdots+a_k}{a_{k+1}+\cdots+a_n}+\frac{a_2+\cdots+a_{k+1}}{a_{k+2}+\cdots+a_n+a_1}+\cdots+\frac{a_n+a_1+\cdots+a_{k-1}}{a_k+\cdots+a_{n-1}}\geqslant\frac{nk}{n-k}(1\leqslant k<n).$$

例4　法国 Louis Pasteur 大学的 Mohammed Aassila 教授，在1998年9月的 Crux Mathematicorum With Mathematical Mayhem 杂志上提出了一个初等的不等式：设a、b、$c>0$，则

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geqslant\frac{3}{1+abc}. \tag{1}$$

仔细研读不等式(1)，虽然形式简洁，但左右两边不是齐次的. 该不等式可以进一步加强为：设$a,b,c>0$，则$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}.$　　(2)

证明　设$\sqrt[3]{abc}=k(k>0)$，则$abc=k^3$，故可设$a=k\cdot\frac{a_2}{a_1}$，$b=k\cdot\frac{a_3}{a_2}$，$c=k\cdot\frac{a_1}{a_3}$(a_1、a_2、$a_3>0$)代入(2)，则只须证：

$$\frac{1}{k\cdot\frac{a_2}{a_1}+k^2\cdot\frac{a_3}{a_1}}+\frac{1}{k\cdot\frac{a_3}{a_2}+k^2\cdot\frac{a_1}{a_2}}+\frac{1}{k\cdot\frac{a_1}{a_3}+k^2\cdot\frac{a_2}{a_3}}\geqslant\frac{3}{k(1+k)},$$

即$\frac{a_1}{a_2+ka_3}+\frac{a_2}{a_3+ka_1}+\frac{a_3}{a_1+ka_2}\geqslant\frac{3}{1+k}.$　　(3)

应用柯西不等式推论 3，及 $(a_1+a_2+a_3)^2 \geqslant 3(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)$，得

$$(3)\text{ 式左边}=\frac{a_1^2}{a_1a_2+ka_1a_3}+\frac{a_2^2}{a_2a_3+ka_2a_1}+\frac{a_3^2}{a_3a_1+ka_3a_2}$$
$$\geqslant \frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{(1+k)(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)} \geqslant \frac{3}{1+k}.$$

说明　$k>0$ 时，$1+k^3 \geqslant k(k+1)$ 显然成立，

所以　$1+abc \geqslant \sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})$，由(2)可推知(1)成立.

例 5　（第 36 届 IMO 试题）设 $a>0$，$b>0$，$c>0$，$abc=1$，求证：

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

证明　因为 $a>0$，$b>0$，$c>0$，$abc=1$，

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$$
$$=\frac{a^2b^2c^2}{a^3(b+c)}+\frac{a^2b^2c^2}{b^3(a+c)}+\frac{a^2b^2c^2}{c^3(a+b)}$$
$$=\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{a^2c^2}{b(a+c)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}$$
$$\geqslant \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3}{2}.$$

例 6　设 a、b、c、d 为正数，求证：$\frac{a}{c+d}+\frac{b}{d+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{d}{b+c} \geqslant 2$.

证明　应用不等式(Ⅲ)及 $a^2+c^2 \geqslant 2ac$，$b^2+d^2 \geqslant 2bd$，则

$$\frac{a}{c+d}+\frac{b}{d-a}+\frac{c}{a+b}+\frac{d}{b+c}$$
$$\geqslant \frac{(a+b+c+d)^2}{a(c+d)+b(d+a)+c(a+b)+d(b+c)}$$
$$=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{2ac+ab+ad+bc+2bd+cd}$$
$$\geqslant \frac{2ac+2bd+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{2ac+ab+ad+bc+2bd+cd}$$
$$=2.$$

所以 $\frac{a}{c+d}+\frac{b}{d+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{d}{b+c} \geqslant 2$.

例 7　（第 31 届 IMO 预选题）设 a，b，c，$d \in \mathbf{R}_+$，$ab+bc+cd+da=1$，求证：

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c} \geqslant \frac{1}{3}.$$

证明　由不等式(Ⅰ)有 $\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}$

$$= \frac{(a^2)^2}{ab+ac+ad} + \frac{(b^2)^2}{bc+bd+ab} + \frac{(c^2)^2}{cd+ac+bc} + \frac{(d^2)^2}{ad+bd+cd}$$

$$\geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)} = \frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{2(1+ac+bd)},$$

因为 $a^2+b^2+c^2+d^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{d^2+a^2}{2} + \frac{c^2+d^2}{2} \geqslant ab+bc+cd+da=1$,

及 $a^2+b^2+c^2+d^2 = (a^2+c^2)+(b^2+d^2) \geqslant 2ac+2bd$,

所以 $\frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{2(1+ac+bd)} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2(1+ac+bd)}$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2(a^2+b^2+c^2+d^2)+(a^2+b^2+c^2+d^2)}{2(1+ac+bd)}$$

$$\geqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{2+2(ac+bd)}{2(1+ac+bd)} = \frac{1}{3},$$

故原不等式成立.

例 8 求 $\frac{a}{\sin\theta} + \frac{b}{\cos\theta}$ $\left(a、b>0,\ \theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 的最小值.

解 设 $\lambda_1、\lambda_2>0$,由柯西不等式知

$(\lambda_1^2+\lambda_2^2)(\sin^2\theta+\cos^2\theta) \geqslant (\lambda_1\sin\theta+\lambda_2\cos\theta)^2$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2} \geqslant \lambda_1\sin\theta+\lambda_2\cos\theta$,"="号成立条件为 $\frac{\lambda_1}{\sin\theta} = \frac{\lambda_2}{\cos\theta}$. (1)

所以 $\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\left(\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta}\right) \geqslant (\lambda_1\sin\theta+\lambda_2\cos\theta)\cdot\left(\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta}\right) \geqslant (\sqrt{a\lambda_1}+\sqrt{b\lambda_2})^2$(柯西不等式)

"="号成立条件为 $\frac{\lambda_1\sin^2\theta}{a} = \frac{\lambda_2\cos^2\theta}{b}$ (2)

所以 $\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta} \geqslant \frac{(\sqrt{a\lambda_1}+\sqrt{b\lambda_2})^2}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}$ 由(1)、(2)知,不等式中"="号成立条件为

$$\begin{cases} \frac{\lambda_1\sin^2\theta}{a} = \frac{\lambda_2\cos^2\theta}{b}, & (3) \\ \frac{\lambda_1}{\sin\theta} = \frac{\lambda_2}{\cos\theta}. & (4) \end{cases}$$

(4)平方乘以(3):$\frac{\lambda_1^3}{a} = \frac{\lambda_2^3}{b} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ 代入(4)得 $\tan\theta = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$,即当 $\theta = \arctan\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ 时 $\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta}$ 有最小值,此时,$\sin\theta = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}}$,$\cos\theta = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}}$,

所以 $\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta} \geqslant (\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^{+}$,

故 $\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta}$，$a$，$b>0$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$的最小值为$(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^{\frac{3}{2}}$.

说明　引入双参数，两次应用柯西不等式缩小，借用两次缩小"＝"号成立的条件，巧妙地避开求参数，而直接求出"＝"号成立时角θ的值，代入直接求出最小值.

类似可求得 $y=\frac{a}{\sin^n\theta}+\frac{b}{\cos^n\theta}(a,b,n\in\mathbf{R}_+)$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 的最小值为 $(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}})^{\frac{n+2}{2}}$.

例 9　a，$b>0$，而 $n\geqslant 2(n\in\mathbf{N}_+)$，求证：

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\cdots+\frac{1}{a+nb}<\frac{n}{\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}b\right)\left(a+\frac{2n+1}{2}b\right)}}.\tag{1}$$

证明　利用柯西(Cauchy)不等式，有

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\cdots+\frac{1}{a+nb}\right)^2\\
\leqslant\ & n\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+2b)^2}+\cdots+\frac{1}{(a+nb)^2}\right]\\
<\ & n\left[\frac{1}{\left(a+\frac{1}{2}b\right)\left(a+\frac{3}{2}b\right)}+\frac{1}{\left(a+\frac{3}{2}b\right)\left(a+\frac{5}{2}b\right)}+\cdots+\frac{1}{\left(a+\frac{2n-1}{2}b\right)\left(a+\frac{2n+1}{2}b\right)}\right]\\
=\ & \frac{n}{b}\cdot\left[\frac{1}{a+\frac{1}{2}b}-\frac{1}{a+\frac{3}{2}b}+\frac{1}{a+\frac{3}{2}b}-\frac{1}{a+\frac{5}{2}b}+\cdots+\frac{1}{a+\frac{2n-1}{2}b}-\frac{1}{a+\frac{2n+1}{2}b}\right]\\
=\ & \frac{n}{b}\cdot\left[\frac{1}{a+\frac{1}{2}b}-\frac{1}{a+\frac{2n+1}{2}b}\right]\\
=\ & \frac{n^2}{\left(a+\frac{1}{2}b\right)\left(a+\frac{2n+1}{2}b\right)},
\end{aligned}$$

即 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\cdots+\frac{1}{a+nb}<\frac{n}{\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}b\right)\left(a+\frac{2n+1}{2}b\right)}}$.

例 10　已知 x_1，$x_2\cdots$，$x_n\in\mathbf{R}^+$，求证：

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n+\frac{4(x_1-x_2)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}.$$

证明　由于 $x^2+y^2-2xy=(x-y)^2$，所以有 $\frac{x^2}{y}=2x-y+\frac{(x-y)^2}{y}$.

所以，

$$\frac{x_1^2}{x_2}=2x_1-x_2+\frac{(x_1-x_2)^2}{x_2},$$

$$\frac{x_2^2}{x_3}=2x_2-x_3+\frac{(x_2-x_3)^2}{x_3},$$

……

$$\frac{x_{n-1}^2}{x_n}=2x_{n-1}-x_n+\frac{(x_{n-1}-x_n)^2}{x_n},$$

$$\frac{x_n^2}{x_1}=2x_n-x_1+\frac{(x_n-x_1)^2}{x_1}$$

叠加得 $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_1}$

$$=x_1+x_2+\cdots+x_n+\frac{(x_1-x_2)^2}{x_2}+\frac{(x_2-x_3)^2}{x_3}+\cdots+\frac{(x_{n-1}-x_n)^2}{x_n}+\frac{(x_n-x_1)^2}{x_1} \quad (1)$$

应用不等式 $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\geqslant\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}(b_k\in\mathbf{R}^+,k=1,2,\cdots,n)$，得

$$\frac{(x_1-x_2)^2}{x_2}+\frac{(x_2-x_3)^2}{x_3}+\cdots+\frac{(x_{n-1}-x_n)^2}{x_n}+\frac{(x_n-x_1)^2}{x_1}$$

$$\geqslant\frac{(x_1-x_2)^2}{x_2}+\frac{[(x_2-x_3)+\cdots+(x_{n-1}-x_n)+(x_n-x_1)]^2}{x_3+\cdots+x_n+x_1}$$

$$=(x_1-x_2)^2\left[\frac{1^2}{x_2}+\frac{1^2}{x_3+\cdots+x_n+x_1}\right]\geqslant\frac{4(x_1-x_2)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

结合等式(1)，立即得知所证不等式成立.

说明 1. 本题是2004年全国高中数学竞赛试题：

已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$，求证：$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n$

的一个有趣的加强.

2. 2005年巴尔干数学奥林匹克试题：设 a,b,c 是正数，求证：

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

本题是当 $n=3$ 时的特例.

3. 本题可推广到更一般的情形：

已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$，$n,m,s\in\mathbf{N}^+$，$m>s$，则有

$$\frac{x_1^m}{x_2^s}+\frac{x_2^m}{x_3^s}+\cdots+\frac{x_n^m}{x_1^s}\geqslant x_1^{m-s}+x_2^{m-s}+\cdots+x_n^{m-s}+\frac{4(x_1-x_2)^2}{(m-s)(x_1^{s+2-m}+x_2^{s+2-m}+\cdots+x_n^{s+2-m})}.$$

（证明 略）

例 11 （第46届IMO试题）正实数 x、y、z 满足 $xyz\geqslant1$，证明：

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geqslant0.$$

原不等式可变形为 $\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}\leqslant 3$.

由柯西不等式及题设条件 $xyz\geqslant 1$,得

$$(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2)\geqslant[x^2(xyz)^{\frac{1}{2}}+y^2+z^2]^2\geqslant(x^2+y^2+z^2)^2,$$

即 $\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\leqslant\frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$.

同理,$\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}\leqslant\frac{zx+z^2+x^2}{x^2+y^2+z^2}$,$\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}\leqslant\frac{xy+x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}$.

把上面三个不等式相加,并利用 $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx$,得

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}\leqslant 2+\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}\leqslant 3.$$

说明 摩尔多瓦选手 Boreico Iurie 的解法获得了特别奖.他的证法如下:

因为 $\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{x^2(x^3-1)^2(y^2+z^2)}{x^3(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)}\geqslant 0$,

所以 $\sum\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\geqslant\sum\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\geqslant\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum(x^2-yz)$(因为 $xyz\geqslant 1$)$\geqslant 0$.

例 12 设 $x, y, z\in\mathbf{R}^+$,A, B, C 为$\triangle ABC$的三个内角,求证:

$$x\sin A+y\sin B+z\sin C\leqslant\frac{1}{2}(xy+yz+zx)\sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}}.$$

证明 记 $u=y\sin B+z\sin C$,$v=z\sin C+x\sin A$,$w=x\sin A+y\sin B$,则

$u^2\leqslant(y\sin B+z\sin C)^2+(y\cos B-z\cos C)^2=y^2+z^2-2yz\cos(B+C)$,

$\cos(B+C)\leqslant\frac{y^2+z^2-u^2}{2yz}$,

同理 $\cos(A+B)\leqslant\frac{z^2+x^2-v^2}{2zx}$,$\cos(A+B)\leqslant\frac{x^2+y^2-w^2}{2xy}$,

三式相加得 $\sum\frac{x^2+y^2-w^2}{2xy}\geqslant\sum\cos(A+B)=-\sum\cos C\geqslant-\frac{3}{2}$($\sum$ 表示循环求和).

故 $\sum\frac{w^2}{xy}\leqslant 3+\sum\frac{x^2+y^2}{xy}$.

而由柯西不等式得

$$(u+v+w)^2\leqslant(yz+zx+xy)\left(\frac{u^2}{yz}+\frac{v^2}{zx}+\frac{w^2}{xy}\right)\leqslant(yz+zx+xy)\left(3+\sum\frac{x^2+y^2}{xy}\right)$$

$$=(yz+zx+xy)^2\cdot\frac{(x+y+z)}{xy},$$

即 $x\sin A+y\sin B+z\sin C\leqslant\frac{1}{2}(xy+yz+zx)\sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}}$.

说明 类似的还可以证明如下不等式：

(1) $x^2+y^2+z^2\geqslant 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C$.

等价1 $xy\sin^2\frac{C}{2}+yz\sin^2\frac{A}{2}+zx\sin^2\frac{B}{2}\geqslant\frac{1}{4}(2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2)$.

等价2 $(x+y+z)^2\geqslant 4\left(xy\cos^2\frac{C}{2}+yz\cos^2\frac{A}{2}+zx\cos^2\frac{B}{2}\right)$.

等价3 $(x+y+z)^2\geqslant 4(xy\sin^2 C+yz\sin^2 A+zx\sin^2 B)$.

(2) $(x+y+z)^2\geqslant 4(yz\sin A_1\sin A_2+zx\sin B_1\sin B_2+xy\sin C_1\sin C_2)$.

证明 $[4(yz\sin A_1\sin A_2+zx\sin B_1\sin B_2+xy\sin C_1\sin C_2)]^2$

$\leqslant 4(yz\sin^2 A_1+zx\sin^2 B_1+xy\sin^2 C_1)\cdot 4(yz\sin^2 A_2+zx\sin^2 B_2+xy\sin^2 C_2)$

$\leqslant (x+y+z)^2\cdot(x+y+z)^2=(x+y+z)^4$.

例13 （2003年中国西部数学奥林匹克试题）设 $2n$ 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 满足条件 $\sum\limits_{i=1}^{2n-1}(a_{i+1}-a_i)^2=1$，求 $(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 的最大值.

证明 首先，当 $n=1$ 时，$(a_2-a_1)^2=1$，故 $a_2-a_1=\pm 1$，此时所求的最大值为1.

当 $n\geqslant 2$ 时，设 $x_1=a_1$，$x_{i+1}=a_{i+1}-a_i$，$i=1, 2, 3, \cdots, 2n-1$，则 $\sum\limits_{i=2}^{2n}x_i^2=1$，且 $a_k=x_1+x_2+\cdots+x_k$，$k=1, 2, \cdots, 2n$.

所以，由柯西不等式得

$$\begin{aligned}&(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\\&=n(x_1+x_2+\cdots+x_n)+nx_{n+1}+(n-1)x_{n+2}+\cdots+x_{2n}-[nx_1+(n-1)x_2+\cdots+x_n]\\&=x_2+2x_3+\cdots+(n-1)x_n+nx_{n+1}+(n-1)x_{n+2}+\cdots+x_{2n}\\&\leqslant[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2+(n-1)^2+\cdots+1^2]^{\frac{1}{2}}(x_2^2+x_3^2+\cdots+x_{2n}^2)^{\frac{1}{2}}\\&=\left[n^2+2\times\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{n(2n^2+1)}{3}}.\end{aligned}$$

当 $a_k=\frac{\sqrt{3}k(k-1)}{2\sqrt{n(2n^2+1)}}$，$k=1, 2, \cdots, n$，$a_{n+k}=\frac{\sqrt{3}[2n^2-(n-k)(n-k+1)]}{2\sqrt{n(2n^2+1)}}$，$k=1, 2, \cdots, n$ 时上述等号成立.

所以 $(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 的最大值为 $\sqrt{\frac{n(2n^2+1)}{3}}$.

说明 柯西不等式实质是一个“系数分离器”：将式子中的系数通过柯西不等式分离成两个单独的式子，从而便于证明或求解.

例14 已知实数 a, b, c, d, e 满足 $3a+2b-c+4d+\sqrt{133}e=\sqrt{133}$，$2a^2+3b^2+3c^2+d^2+6e^2=60$，试求 e 在何时取最值，最大值与最小值各为多少？

解 可将题设条件改写为：$\begin{cases}3a+2b-c+4d=\sqrt{133}-\sqrt{133}e, & (1)\\ 2a^2+3b^2+3c^2+d^2=60-6e^2, & (2)\end{cases}$

将(1)式两边平方，并运用柯西不等式及(2)得

$(\sqrt{133}-\sqrt{133}e)^2=(3a+2b-c+4d)^2=\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}a+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}b+\frac{-1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}c+4d\right)^2\leqslant$

$\left(\frac{9}{2}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+16\right)\cdot(2a^2+3b^2+3c^2+d^2)=\frac{133}{6}(60-6e^2)=133(10-e^2)$.

整理得 $2e^2-2e-9\leqslant0$，解之得 $\frac{1-\sqrt{19}}{2}\leqslant e\leqslant\frac{1+\sqrt{19}}{2}$.

当且仅当 $\frac{2a}{3}=\frac{3b}{2}=-3c=\frac{d}{4}$ 时，不等式 $2e^2-2e-9\leqslant0$ 中的等号才成立，亦即只有这时 e 才能取得最大值与最小值.

由 $\frac{2a}{3}=\frac{3b}{2}=-3c=\frac{d}{4}$，可得 $a=\frac{3d}{8}$，$b=\frac{d}{6}$，$c=-\frac{d}{12}$，将它们分别代入 $3a+2b-c+4d=\sqrt{133}-\sqrt{133}e$ 与 $2a^2+3b^2+3c^2+d^2=60-6e^2$，可得

$$d=\frac{24(1-e)}{\sqrt{133}},\ d^2=\frac{96(60-6e^2)}{133}.$$

解方程组 $\begin{cases}d=\frac{24(1-e)}{\sqrt{133}},\\ d^2=\frac{96(60-6e^2)}{133},\end{cases}$

可得 $\begin{cases}e_1=\frac{1-\sqrt{19}}{2}\\ d_1=\frac{12(\sqrt{133}+19\sqrt{7})}{133}\end{cases}$，$\begin{cases}e_2=\frac{1+\sqrt{19}}{2}\\ d_2=\frac{12(\sqrt{133}-19\sqrt{7})}{133}\end{cases}$.

所以当 $a=\frac{3d_1}{8}$，$b=\frac{d_1}{6}$，$c=-\frac{d_1}{12}$，$d=d_1$ 时，e 取最小值 $\frac{1-\sqrt{19}}{2}$，

当 $a=\frac{3d_2}{8}$，$b=\frac{d_2}{6}$，$c=-\frac{d_2}{12}$，$d=d_2$ 时，e 取最大值 $\frac{1+\sqrt{19}}{2}$.

说明 求 e 的最值，应该要有关于 e 的不等式. 已知条件的两个方程有5个未知数，如何消元并分离出 e 是问题的关键，柯西不等式在这里发挥了较好的作用.

例 15 （2006年中国数学奥林匹克试题）实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，求证：$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(a_k^2)\leqslant\frac{n}{3}\sum\limits_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})^2$.

证 只需对任意 $1\leqslant k\leqslant n$，证明不等式成立即可.

记 $d_k=a_k-a_{k+1}$，$k=1,2,\cdots,n-1$，则

$a_k = a_k$，$a_{k+1} = a_k - d_k$，$a_{k+2} = a_k - d_k - d_{k+1}$，…，

$a_n = a_k - d_k - d_{k+1} - \cdots - d_{n-1}$，$a_{k-1} = a_k + d_{k-1}$，$a_{k-2} = a_k + d_{k-1} + d_{k-2}$，…，

$a_1 = a_k + d_{k-1} + d_{k-2} + \cdots + d_1$．

把上面这 n 个等式相加，并利用 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ 可得

$$na_k - (n-k)d_k - (n-k-1)d_{k+1} - \cdots - d_{n-1} + (k-1)d_{k-1} + (k-2)d_{k-2} + \cdots + d_1 = 0$$

由柯西(Cauchy)不等式可得

$$(na_k)^2 = [(n-k)d_k + (n-k-1)d_{k+1} + \cdots + d_{n-1} - (k-1)d_{k-1} - (k-2)d_{k-2} - \cdots - d_1]^2$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{k-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-k} i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n-1} i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2\right)$$

$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2\right) \leqslant \frac{n^3}{3}\left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2\right),$$

所以 $a_k^2 \leqslant \frac{n}{3}\left(\sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})^2\right)$．

例 16 （2006 年中国数学奥林匹克国家集训队考试题）设 $x, y, z > 0$，$x+y+z=1$，求证：$\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}} + \frac{yz}{\sqrt{yz+zx}} + \frac{zx}{\sqrt{zx+xy}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$．

证明 由柯西不等式有

$$\left(\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}} + \frac{yz}{\sqrt{yz+zx}} + \frac{zx}{\sqrt{zx+xy}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{x+z}} + \frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{y+x}} + \frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{z+y}}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{x+y}\cdot\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{y+z}\cdot\frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{(y+z)(y+x)}} + \sqrt{z+x}\cdot\frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}\right)^2$$

$$\leqslant 2(x+y+z)\left[\frac{x^2y}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2z}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2x}{(z+x)(z+y)}\right]$$

$$= 2\left[\frac{x^2y}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2z}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2x}{(z+x)(z+y)}\right].$$

因此，要证原不等式只需证：

$$2\left[\frac{x^2y}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2z}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2x}{(z+x)(z+y)}\right] \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4[x^2y(y+z) + y^2z(z+x) + z^2x(x+y)] \leqslant (x+y)(y+z)(z+x)(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow x^3y + xy^3 + y^3z + yz^3 + z^3x + zx^3 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow xy(x-y)^2 + yz(y-z)^2 + zx(z-x)^2 \geqslant 0.$$

后一式显然成立，故原不等式成立.

说明 本题命题者给出的证法是利用排序不等式，证它的加强.

思考交流

思考题1 （2003年CMO试题）设 a、b、c、d 为正实数，满足 $ab+cd=1$. 点 $P_i(x_i, y_i)(i=1,2,3,4)$ 是以原点为圆心的单位圆周上的四个点. 求证：

$$(ay_1+by_2+cy_3+dy_4)^2+(ax_4+bx_3+cx_2+dx_1)^2 \leqslant 2\left(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}\right).$$

证明 记 $\alpha = ay_1+by_2+cy_3+dy_4$，$\beta = ax_4+bx_3+cx_2+dx_1$.

由柯西不等式得

$$[(\sqrt{ad}y_1)^2+(\sqrt{bc}y_2)^2+(\sqrt{bc}y_3)^2+(\sqrt{ad}y_4)^2]\cdot\left[\left(\sqrt{\frac{a}{d}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{d}{a}}\right)^2\right]$$

$$\geqslant (ay_1+by_2+cy_3+dy_4)^2=\alpha^2,$$

即 $\alpha^2 \leqslant (ady_1^2+bcy_2^2+bcy_3^2+ady_4^2)\cdot\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{d}{a}\right)$.

同理，$\beta^2 \leqslant (adx_4^2+bcx_3^2+bcx_2^2+adx_1^2)\cdot\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{d}{a}\right)$，

将以上两式相加，并利用 $x_i^2+y_i^2=1(i=1,2,3,4)$，$ab+cd=1$ 得，

$$\alpha^2+\beta^2 \leqslant (2ad+2bc)\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{d}{a}\right)$$

$$=2(ad+bc)\left(\frac{ab+cd}{bd}+\frac{ab+cd}{ac}\right)$$

$$=2(ad+bc)\left(\frac{1}{bd}+\frac{1}{ac}\right)=2\left(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}\right).$$

思考题2 （2006年中国数学奥林匹克国家集训队考试题）设已知 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是正数，且满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$，求证：$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}\right)\leqslant\frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$.

证明 设 $1+x_i=y_i$，则 $x_i=y_i-1$，$y_i>1(i=1,2,\cdots,n)$，$\sum_{i=1}^{n}y_i=n+1$. 原不等式等价于

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{y_i}}\right)\leqslant\frac{n^2}{\sqrt{n+1}}, \quad (1)$$

由柯西不等式有

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{y_1-1}+\sqrt{y_2-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{y_3-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\sqrt{y_n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\leqslant\sqrt{\left(\frac{1}{n}+y_2+y_3+\cdots+y_n-(n-1)\right)\left(y_1-1+\frac{n-1}{n}\right)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{n}+n+1-y_1-n+1\right)\left(y_1-\frac{1}{n}\right)}$$

$$=\sqrt{-y_1^2+\frac{2(n+1)}{n}y_1-\frac{2n+1}{n^2}}.$$

所以，$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{y_i-1}}{\sqrt{y_1}}\leqslant\sqrt{n}\sqrt{-y_1+\dfrac{2}{n}(n+1)-\dfrac{2n+1}{n^2}\cdot\dfrac{1}{y_1}}$.

同理，有 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{y_i-1}}{\sqrt{y_2}}\leqslant\sqrt{n}\sqrt{-y_2+\dfrac{2}{n}(n+1)-\dfrac{2n+1}{n^2}\cdot\dfrac{1}{y_2}},\cdots,$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{y_i-1}}{\sqrt{y_n}}\leqslant\sqrt{n}\sqrt{-y_n+\frac{2}{n}(n+1)-\frac{2n+1}{n^2}\cdot\frac{1}{y_n}}.$$

相加并应用柯西不等式，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{y_i}}\right)\leqslant\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{-y_i+\frac{2}{n}(n+1)-\frac{2n+1}{n^2}\cdot\frac{1}{y_i}}$$

$$\leqslant\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(-y_i+\frac{2}{n}(n+1)-\frac{2n+1}{n^2}\cdot\frac{1}{y_i}\right)}$$

$$=n\sqrt{-(n+1)+2(n+1)-\frac{2n+1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}}=n\sqrt{n+1-\frac{2n+1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}}.$$

由柯西不等式的等价形式有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{y_i}\geqslant\dfrac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}=\dfrac{n^2}{n+1}$,

所以，$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{y_i-1}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{y_i}}\right)\leqslant n\sqrt{n+1-\left(\dfrac{2n+1}{n^2}\right)\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{y_i}}$

$$\leqslant n\sqrt{n+1-\frac{2n+1}{n^2}\cdot\frac{n^2}{n+1}}=\frac{n^2}{\sqrt{n+1}},$$

即(1)式成立，故原不等式成立.

说明 本题命题者提供的答案是用三角代换法，过程复杂且不易想到，不如这里用柯西不等式简捷明快.

同步检测5

1. 已知 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，求证：

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant 1.$$

2. 设 $x=\dfrac{a}{a+2b}+\dfrac{b}{b+2c}+\dfrac{c}{c+2a}$，这里 $a,b,c>0$，求证：$x\geqslant 1$.

3. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，求证：$\dfrac{a}{a+2b+c}+\dfrac{b}{a+b+2c}+\dfrac{c}{2a+b+c}\geqslant\dfrac{3}{4}$.

4. 已知正数 x,y,z 满足 $x+y+z=1$，求证：$\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}\geqslant 36$.

5. 设 a,b,c,d 均为正数，求证：$2\sqrt{a+b+c+d}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$.

6. 设 $a_i\geqslant 0$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-a_i}\leqslant\sqrt{(n-1)n}.$$

7. 已知 a,b,c,d 是任意正数，求证：$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{d+a}+\dfrac{d}{a+b}\geqslant 2$.

8. 设 a,b,c 为正实数且满足 $abc=1$，试证：

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(c+a)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

9. 已知正数 a,b 满足 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$，试证：对每一个正整数 n，有

$$(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}.$$

10. 用柯西不等式推导平面上点到直线的距离公式.

11. 在实数集内解方程 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{4}\\ 8x+6y-24z=39.\end{cases}$

12. n 是任意正自然数，求证：$A=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n+1}>1$.

13. 已知 $x,y,z>0$ 且 $\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{y^2}{1+y^2}+\dfrac{z^2}{1+z^2}=2$.

求证：$\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}\leqslant\sqrt{2}$.

14. 在体对角线长为 l 的长方体中，求体对角线在相邻三个面上的射影长的和的最大值.

15. 设 $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$，且 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$，求证 $\frac{\sin^3\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin^3\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin^3\gamma}{\sin\alpha} \geqslant 1$.

16. 设 $a, b, n \in \mathbf{R}_+$，求 $y = \frac{a}{\sqrt{(1+x)^n}} + \frac{b}{\sqrt{(1-x)^n}}$，$x \in (-1, 1)$ 的最小值.

17. 设 $x, y, z \in \mathbf{R}_+$，$x+y+z=1$，n 是正整数，则

$$\frac{x^4}{y(1-y^n)} + \frac{y^4}{z(1-z^n)} + \frac{z^4}{x(1-x^n)} \geqslant \frac{3^n}{3^{n+2}-9}.$$

18. (2005 年全国高中数学联赛加试题)设正数 a, b, c, x, y, z 满足 $cy+bz=a$，$az+cx=b$，$bx+ay=c$，求函数 $f(x, y, z) = \frac{x^2}{1+x} + \frac{y^2}{1+y} + \frac{z^2}{1+z}$ 的最小值.

19. 设 $x, y, z \in \mathbf{R}_+$，且 $xyz = 1$，求证：$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+x)(1+z)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geqslant \frac{3}{4}$.

20. (2004 年中国西部数学奥林匹克试题)求证：对任意实数 a, b, c 都有

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

21. 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}_+$，$a+b+c=1$. 对 $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}^+$，令

$y_1 = ax_1 + bx_2 + cx_3$，$y_2 = ax_2 + bx_3 + cx_1$，$y_3 = ax_3 + bx_1 + cx_2$.

求证：$y_1y_2y_3 \geqslant x_1x_2x_3$.

22. 已知 a, b, c 为正实数，且 $ab+bc+ca=1$，证明：$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \leqslant \frac{9}{4}$.

23. (2004 年日本数学奥林匹克试题)正实数 a, b, c 满足 $a+b+c=1$. 求证：

$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} \leqslant 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right).$$

24. (1) 设 3 个正实数 a, b, c 满足不等式

$$(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4),$$

求证：a, b, c 一定是某个三角形的 3 条边长.

(2) 设 n 个正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足不等式

$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4)$（其中 $n \geqslant 3$），

求证：这些数中任何 3 个一定是某个三角形的 3 条边长.

25. 设 x, y, z 是大于 -1 的实数，证明：$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geqslant 2$.

第6讲 排序不等式与切比雪夫不等式

知识点金

1. 排序不等式(又称排序原理)

设$\{a_k\}$、$\{b_k\}$是两个有序数组，满足$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$及$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$. 其中$j_1, j_2, \cdots, j_n$是1, 2, …, n的任一排列，则

$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ (同序和)

$\geqslant a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}$ (乱序和)

$\geqslant a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$ (逆序和)

当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$或$b_1=b_2=\cdots=b_n$时等号(对任一排列$j_1, j_2, \cdots, j_n$)成立.

证明 因为排列$b_1, b_2, \cdots, b_n$的重排只有有限种不同，所以$S=\sum_{i=1}^{n}a_ib_{j_i}$不同的值也只有有限多个，这些值中必有最大值和最小值.

在乱序和S中不妨设$j_n\neq n$(若$j_n=n$，则考虑$j_{n-1}\neq n-1$)，且在和S中含有项$a_kb_n(k\neq n)$，则$a_kb_n+a_nb_{j_n}\leqslant a_kb_{j_n}+a_nb_n$. ①

事实上，左－右＝$(a_n-a_k)(b_n-b_{j_n})\geqslant 0$.

由此可知，当$j_n\neq n$时，调换$S=a_1b_{j_1}+\cdots+a_kb_{j_k}+\cdots+a_nb_{j_n}(j_n\neq n)$中$b_n$与$b_{j_n}$位置(其余不动)，所得新和$S_1\geqslant S$. 调整好$a_n$及$b_n$后，接着再仿上调整$a_{n-1}$与$b_{n-1}$，又得$S_2\geqslant S_1$. 如此至多经$n-1$次调整得顺序和

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\geqslant a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n} \quad ②$$

这就证得"顺序和不小于乱序和".

显然，当$a_1=a_2=\cdots=a_n$或$b_1=b_2=\cdots=b_n$时②中等号成立. 反之，若它们不全相等，则必存在j_n及k，使$b_n>b_{j_n}$，$a_n>a_k$. 这时①中等号不成立. 因而对这个排列②中等号不成立.

类似地可证"乱序和不小于逆序和".

说明 对两个有序数组$-a_n \leqslant -a_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant -a_2 \leqslant -a_1$及$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，应用上面已证明的“顺序和不小于乱序和”，得

$$(-a_1)b_{j_1}+(-a_2)b_{j_2}+\cdots+(-a_n)b_{j_n} \leqslant (-a_1)b_n+(-a_2)b_{n-1}+\cdots+(-a_n)b_1$$

即“乱序和不小于逆序和”：$a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n} \geqslant a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$.

2. 切比雪夫不等式

设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是两个有序数组，满足$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，则

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n} \geqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$$
$$\geqslant \frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}.$$

当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$或$b_1=b_2=\cdots=b_n$时等号成立。

证明 由题设和排序不等式，有

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n = a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,$$
$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \geqslant a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_nb_1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \geqslant a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_nb_{n-1}.$$

将上述n个不等式叠加后，两边同除以n^2，即得左边不等式

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n} \geqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}.$$

类似可证$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \geqslant \frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}$.

说明 切比雪夫不等式可加权推广为：

设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是两个有序数组，满足$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，$\lambda_i > 0(i=1,2,\cdots,n)$，则$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_ib_i \geqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i\sum_{i=1}^{n}\lambda_ib_i \geqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_ib_{n-i+1}$.

当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$或$b_1=b_2=\cdots=b_n$时等号成立.

证明 设$f_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_ib_i-\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i\sum_{i=1}^{n}\lambda_ib_i$，$n \geqslant 2$. 则

$f_2=\lambda_1\lambda_2(a_1-a_2)(b_1-b_2) \geqslant 0$.

$$f_{n+1}-f_n=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_ia_ib_i-\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_ia_i\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_ib_i-\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_ib_i-\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i\sum_{i=1}^{n}\lambda_ib_i\right]$$
$$=\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i+\lambda_{n+1}\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_ib_i+\lambda_{n+1}a_{n+1}b_{n+1}\right]-\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i+\lambda_{n+1}a_{n+1}\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_ib_i+\right.$$

$$\lambda_{n+1}b_{n+1}\Big]-\Big[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_ib_i-\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i\sum_{i=1}^{n}\lambda_ib_i\Big]$$

$$=\lambda_{n+1}a_{n+1}b_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i+\lambda_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_ib_i-\lambda_{n+1}a_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_ib_i-\lambda_{n+1}b_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i$$

$$=\lambda_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(a_i-a_{n+1})(b_i-b_{n+1})\geqslant 0 \qquad ③$$

所以 $f_{n+1}\geqslant f_n$、$f_n\geqslant f_2\geqslant 0(n\geqslant 2)$. 这就证明了左边不等式,类似可证右边不等式.

注:由③可推知 $f_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_ib_i-\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i\sum_{i=1}^{n}\lambda_ib_i=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j(a_i-a_j)(b_i-b_j)\geqslant 0$.

取 $\lambda_i=1(i=1,2,\cdots,n)$,由上也得到了切比雪夫不等式的递推证法.

例题精析

例 1 对 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,比较 $a^3+b^3+c^3$ 与 $a^2b+b^2c+c^2a$ 的大小.

分析 要应用"排序不等式",必须取两组便于排序的数,这要从两式的结构上去分析.

解 取两组数 a,b,c;a^2,b^2,c^2. 不管 a,b,c 的大小顺序如何,$a^3+b^3+c^3$ 都是同序和,$a^2b+b^2c+c^2a$ 都是乱序和,故有

$$a^3+b^3+c^3\geqslant a^2b+b^2c+c^2a.$$

说明 适宜使用排序不等式解题有两种情形:一是知道各数的顺序;二是不知道各数的顺序,但不等式是对称不等式,可以进行优化假设. 对于轮换对称不等式,不能采用排序不等式去解决.

例 2 (第三届美国数学奥林匹克试题)设 a,b,c 均为正数,证明:

$$a^a\cdot b^b\cdot c^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

分析 不等式的左右两端均为指数形式,可以在两边取对数后再利用排序不等式证明.

证明 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$,则 $\ln a\geqslant\ln b\geqslant\ln c$,于是由排序不等式,有

$$a\ln a+b\ln b+c\ln c=a\ln a+b\ln b+c\ln c,$$
$$a\ln a+b\ln b+c\ln c\geqslant a\ln a+b\ln c+c\ln b,$$
$$a\ln a+b\ln b+c\ln c\geqslant a\ln b+b\ln a+c\ln c,$$
$$a\ln a+b\ln b+c\ln c\geqslant a\ln b+b\ln c+c\ln a$$
$$a\ln a+b\ln b+c\ln c\geqslant a\ln c+b\ln a+c\ln b$$
$$a\ln a+b\ln b+c\ln c\geqslant a\ln c+b\ln b+c\ln a$$

将以上各式相加,得 $a\ln a+b\ln b+c\ln c\geqslant\dfrac{a+b+c}{3}(\ln b+\ln c+\ln a)$,

变形即得 $a^a\cdot b^b\cdot c^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$

例 3 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，求证 $a+b-c\leqslant\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\leqslant\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}$.

分析 不失一般性可先将 a,b,c 三个规定为 $a\geqslant b\geqslant c>0$.

证明 由于不等式关于 a,b,c 对称，可设 $a\geqslant b\geqslant c>0$. 于是 $a^2\geqslant b^2\geqslant c^2$，$\frac{1}{c}\geqslant\frac{1}{b}\geqslant\frac{1}{a}$.

由排序不等式，得 $a^2\cdot\frac{1}{a}+b^2\cdot\frac{1}{b}+c^2\cdot\frac{1}{c}$（逆序和）$\leqslant a^2\cdot\frac{1}{b}+b^2\cdot\frac{1}{c}+c^2\cdot\frac{1}{a}$（乱序和）及 $a^2\cdot\frac{1}{a}+b^2\cdot\frac{1}{b}+c^2\cdot\frac{1}{c}\leqslant a^2\cdot\frac{1}{c}+b^2\cdot\frac{1}{a}+c^2\cdot\frac{1}{b}$. 以上两个同向不等式相加再除以 2，即得原式中第一个不等式. 再考虑数组 $a^3\geqslant b^3\geqslant c^3>0$，及 $\frac{1}{bc}\geqslant\frac{1}{ca}\geqslant\frac{1}{ab}$，仿上可证第二个不等式，请读者自己完成.

说明 应用排序不等式的技巧在于构造两个有序数组，应从所要证的式子的结构观察分析，再给出适当的数组.

例 4 在$\triangle ABC$中，试证：$\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}$.

分析 可构造$\triangle ABC$的边和角的序列，应用排序不等式来证明.

证明 不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$，于是 $A\leqslant B\leqslant C$. 由排序不等式，得

$$aA+bB+cC=aA+bB+cC,$$
$$aA+bB+cC\geqslant bA+cB+aC,$$
$$aA+bB+cC\geqslant cA+aB+bC.$$

相加得 $3(aA+bB+cC)\geqslant(a+b+c)(A+B+C)=\pi(a+b+c)$，

得 $\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}\geqslant\frac{\pi}{3}$. ①

又由 $0<b+c-a$，$0<a+b-c$，$0<a+c-b$，有

$0<A(b+c-a)+C(a+b-c)+B(a+c-b)=a(B+C-A)+b(A+C-B)+c(A+B-C)=a(\pi-2A)+b(\pi-2B)+c(\pi-2C)=(a+b+c)\pi-2(aA+bB+cC)$.

得
$$\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}.\qquad ②$$

由①、②得原不等式成立.

说明 此题后半部分应用了不等式的性质来证明. 前半部分也可直接用切比雪夫不等式证之.

例 5 设 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，求证：$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$. （*）

证明 由对称性，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$.

则 $\frac{1}{b+c} \geqslant \frac{1}{c+a} \geqslant \frac{1}{a+b}$，

所以（顺序和）$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}$（乱序和），（顺序和）$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}$（乱序和），将以上两式相加即得

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

说明　这是一个经典的不等式竞赛题，在锐角$\triangle ABC$中，我们取：

(1) $a=\tan A$，$b=\tan B$，$c=\tan C$，由（*）可推出等价不等式：

$$\frac{\cos(B-C)}{\cos A}+\frac{\cos(C-A)}{\cos B}+\frac{\cos(A-B)}{\cos C} \geqslant 6.$$

(2) $a=\tan A+\tan B$，$b=\tan B+\tan C$，$c=\tan C+\tan A$，代入（*）式可推出等价优美的三角不等式：$\frac{\cos A}{\cos(B-C)}+\frac{\cos B}{\cos(C-A)}+\frac{\cos C}{\cos(A-B)} \geqslant \frac{3}{2}$.

例 6　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = S$ 的正实数. 求证：

$$\frac{a_1^2}{a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2^2}{a_1+a_3+\cdots+a_n}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}} \geqslant \frac{S}{n-1}.$$

证明　不失一般性，设 $0<a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，且令

$$A_1=\frac{a_1^2}{a_2+a_3+\cdots+a_n},\ A_2=\frac{a_2^2}{a_1+a_3+\cdots+a_n},\cdots,\ A_n=\frac{a_n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}.$$

则有 $0<A_1 \leqslant A_2 \leqslant \cdots \leqslant A_n$.

由排序不等式，得 $a_1A_1+a_2A_2+\cdots+a_nA_n \geqslant a_2A_1+a_3A_2+\cdots+a_1A_n$，

$$a_1A_1+a_2A_2+\cdots+a_nA_n \geqslant a_3A_1+a_4A_2+\cdots+a_2A_n,$$

……

$$a_1A_1+a_2A_2+\cdots+a_nA_n \geqslant a_nA_1+a_1A_2+\cdots+a_{n-1}A_n.$$

相加，得　$(n-1)(a_1A_1+a_2A_2+\cdots+a_nA_n)$

$\geqslant (a_2+a_3+\cdots+a_n)A_1+(a_1+a_3+\cdots+a_n)A_2+\cdots+(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})A_n$

$=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=S.$

故得　$$\frac{a_1^2}{a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2^2}{a_1+a_3+\cdots+a_n}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}} \geqslant \frac{S}{n-1}.$$

例 7　设 $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，$0 \leqslant b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，$i_1, i_2, \cdots, i_n$ 及 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的任意两个排列. 求证：$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{a_{i_r} \cdot b_{j_s}}{r+s} \geqslant \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{a_r \cdot b_s}{r+s}$.

证明 令 $d_r = \sum_{s=1}^{n} \frac{b_{i_s}}{r+s}(r=1,2,\cdots,n)$ 显然 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$(因为 $b_{i_s} \geqslant 0$). 又因为

$$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n, \frac{1}{r+1} \geqslant \frac{1}{r+2} \geqslant \cdots \geqslant \frac{1}{r+n},$$

则由排序不等式得 $\sum_{s=1}^{n} \frac{b_s}{r+s} \leqslant d_r$.

又因为 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$,

所以 $\sum_{r=1}^{n} a_r d_r \leqslant \sum_{r=1}^{n} a_{i_r} d_r$, 且 $\sum_{r=1}^{n} a_r \sum_{s=1}^{n} \frac{b_s}{r+s} \leqslant \sum_{r=1}^{n} a_r d_r (a_r \geqslant 0)$,

所以 $\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{a_{i_r} b_{i_s}}{r+s} = \sum_{r=1}^{n} a_{i_r} \sum_{s=1}^{n} \frac{b_{i_s}}{r+s} \geqslant \sum_{r=1}^{n} a_{i_r} d_r \geqslant \sum_{r=1}^{n} a_r d_r \geqslant \sum_{r=1}^{n} a_r \sum_{s=1}^{n} \frac{b_s}{r+s}$

$= \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{a_r b_s}{r+s}$.

例 8 (2006 年女子奥林匹克试题)设 $x_i > 0 (i=1,2,\cdots,n)$, $k \geqslant 1$. 求证:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k+1}}{1+x_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^k}.$$

证明 不妨设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n > 0$. 则

$$\frac{1}{x_1^k} \leqslant \frac{1}{x_2^k} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{x_n^k}, \frac{x_1^k}{1+x_1} \geqslant \frac{x_2^k}{1+x_2} \geqslant \cdots \geqslant \frac{x_n^k}{1+x_n} (k \geqslant 1).$$

于是,根据切比雪夫不等式,有

左式 $= \left(\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n}\right)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$

$= \left(\frac{1}{x_1^k} \cdot \frac{x_1^k}{1+x_1} + \frac{1}{x_2^k} \cdot \frac{x_2^k}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n^k} \cdot \frac{x_n^k}{1+x_n}\right)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$

$\leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1^k} + \frac{1}{x_2^k} + \cdots + \frac{1}{x_n^k}\right)\left(\frac{x_1^k}{1+x_1} + \frac{x_2^k}{1+x_2} + \cdots + \frac{x_n^k}{1+x_n}\right) \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$

$\leqslant \left(x_1 \cdot \frac{x_1^k}{1+x_1} + x_2 \cdot \frac{x_2^k}{1+x_2} + \cdots + x_n \cdot \frac{x_n^k}{1+x_n}\right)\left(\frac{1}{x_1^k} + \frac{1}{x_2^k} + \cdots + \frac{1}{x_n^k}\right)$

$= \left(\frac{x_1^{k+1}}{1+x_1} + \frac{x_2^{k+1}}{1+x_2} + \cdots + \frac{x_n^{k+1}}{1+x_n}\right)\left(\frac{1}{x_1^k} + \frac{1}{x_2^k} + \cdots + \frac{1}{x_n^k}\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k+1}}{1+x_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^k}$.

例 9 (第 36 届 IMO 预选题)设 $n(n \geqslant 3)$ 为正整数, $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ 为实数. 求证:

$$\frac{n(n-1)}{2} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j > \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) x_i \sum_{j=2}^{n} (j-1) x_j.$$

证明 令 $y_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k (k=1,2,\cdots,n)$. 则

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i,$$

$$x_2 + 2x_3 + \cdots + (n-1)x_n = \sum_{j=2}^{n}(j-1)x_j.$$

记 $z_i = \frac{y_i}{i}$. 由 $x_i < x_{i+1}$，可知 $z_{n-1} > z_{n-2} > \cdots > z_1$.

原不等式即为

$$\frac{n(n-1)}{2}\sum_{i=1}^{n-1} iz_ix_{i+1} > [z_1 + 2z_2 + \cdots + (n-1)z_{n-1}]\cdot[x_2 + 2x_3 + \cdots + (n-1)x_n].$$

由切比雪夫不等式即证.

说明 直接求差比较，有

$$左 - 右 = \sum_{1\le j<k\le i-1,\ j<i\le n}(x_j - x_k)(x_i - x_s) > 0.$$

将原不等式的证明化为左、右两边项数的计算即可.

例 10 设 $x,y,z,\lambda\in \mathbf{R}^+$，$k\geqslant 1$ 且 $x+y+z=3$，证明：

$$\frac{x^k}{(\lambda+y)(\lambda+z)} + \frac{y^k}{(\lambda+z)(\lambda+x)} + \frac{z^k}{(\lambda+x)(\lambda+y)} \geqslant \frac{3}{(\lambda+1)^2}. \tag{1}$$

证明 由对称性，不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$. 则

$$\frac{1}{(\lambda+y)(\lambda+z)} \geqslant \frac{1}{(\lambda+z)(\lambda+x)} \geqslant \frac{1}{(\lambda+x)(\lambda+y)}.$$

由切比雪夫不等式，幂平均不等式，均值不等式得

$$\begin{aligned}
左边 &\geqslant \frac{1}{3}(x^k + y^k + z^k)\left[\frac{1}{(\lambda+y)(\lambda+z)} + \frac{1}{(\lambda+z)(\lambda+x)} + \frac{1}{(\lambda+x)(\lambda+y)}\right] \\
&\geqslant \left[\frac{1}{3}(x+y+z)\right]^k \cdot \frac{3}{\left[\sqrt[3]{(\lambda+x)(\lambda+y)(\lambda+z)}\right]^2} \\
&\geqslant \frac{3}{\left[\frac{1}{3}(3\lambda + (x+y+z))\right]^2} = \frac{3}{(\lambda+1)^2}.
\end{aligned}$$

说明 若将条件改为 $xyz=1$、$k>0$ 可证不等式(1)仍成立. 此时 (1)式是第 39 届 IMO 预选题：$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geqslant \frac{3}{4}$ 的推广.

幂平均值不等式将在第七章例 10 中给出证明.

例 11 设 $a_i > 0, i = 1,2,\cdots,n, n\geqslant 2, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1, B > 0, A > -Bn$，则

$$(An+Bn^2)\sum_{i=1}^{n}a_i^3 \geqslant A\sum_{i=1}^{n}a_i^2+B. \tag{1}$$

证法 1 不妨设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$，则 $a_1^2 \geqslant a_2^2 \geqslant \cdots \geqslant a_n^2$，由切比雪夫不等式，得 $\sum_{i=1}^{n}a_i^3 \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$.

又由柯西不等式，得 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \geqslant \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2=\frac{1}{n}$.

而 $A>-Bn$，所以，$An+Bn^2>0$，因此

$$(An+Bn^2)\sum_{i=1}^{n}a_i^3 \geqslant (An+Bn^2)\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2=A\sum_{i=1}^{n}a_i^2+Bn\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

$$\geqslant A\sum_{i=1}^{n}a_i^2+Bn\cdot\frac{1}{n}=A\sum_{i=1}^{n}a_i^2+B.$$

故不等式(1)成立.

证法 2 令 $f(a_i)=(An+Bn^2)a_i^3-Aa_i^2$，不等式(1)即 $\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\geqslant B$. (2)

设 λ 为待定系数，使 $f(a_i)-\frac{B}{n}=(An+Bn^2)a_i^3-Aa_i^2-\frac{B}{n}\geqslant\lambda\left(a_i-\frac{1}{n}\right)$. (3)

而(3)式 $\Leftrightarrow (na_i-1)[(An+Bn^2)a_i^2+Bna_i+B]\geqslant\lambda(na_i-1)$，

考虑此式等号成立，应有 $(na_i-1)[(An+Bn^2)a_i^2+Bna_i+B]=\lambda(na_i-1)$.

约去 na_i-1 并令 $a_i=\frac{1}{n}$，可得 $\lambda=3B+\frac{A}{n}$，下面先证明

$$f(a_i)-\frac{B}{n}=(An+Bn^2)a_i^3-Aa_i^2-\frac{B}{n}\geqslant\left(3B+\frac{A}{n}\right)\left(a_i-\frac{1}{n}\right). \tag{4}$$

因(3)式 $\Leftrightarrow (na_i-1)[(An+Bn^2)a_i^2+Bna_i+B]\geqslant\left(3B+\frac{A}{n}\right)(na_i-1)$

所以 $$(na_i-1)^2[(Bn+A)na_i+2nB+A]\geqslant 0. \tag{5}$$

由 $A>-Bn$ 得 $n(Bn+A)>0$，又 $2Bn+A>0$，则(5)式显然成立，故(4)成立. 求和并利用 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$ 得 $\sum_{i=1}^{n}\left[f(a_i)-\frac{B}{n}\right]\geqslant\left(3B+\frac{A}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-\frac{1}{n}\right)=0$，即 $\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\geqslant B$，故不等式(1)成立.

说明 取 $n=3$，$A=6$，$B=1$ 即得第三届东南数学奥林匹克试题第 6 题：

求最小的实数 m，使不等式

$$m(a^3+b^3+c^3)\geqslant 6(a^2+b^2+c^2)+1$$

对满足 $a+b+c=1$ 的任意正实数 a,b,c 恒成立.

本题实际上是要证明：当 $a+b+c=1$ 且 $a,b,c>0$ 时，有

$$27(a^3+b^3+c^3)\geqslant 6(a^2+b^2+c^2)+1.$$

再取 $n=4, A=1, B=\frac{1}{8}$ 即得 2005 年第 8 届香港数学奥林匹克试题第 3 题：

设 $a,b,c,d>0$ 且 $a+b+c+d=1$，证明 $6(a^3+b^3+c^3+d^3)\geqslant a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$.

思考交流

思考题 1 有十个人各拿一只水桶去打水，设水龙头灌满第 i 个人的水桶需要 t_i 分钟，且这些 $t_i(i=1,2,\cdots,10)$ 各不相等，试问：

(1) 只有一只水龙头供水时，应如何安排这十个人打水的次序，使他们的总花费时间最少？这个最少时间是多少？

(2) 若有两个相同的水龙头供水时，应如何安排这十个人的次序，使他们的总花费时间最少？这个最少时间是多少？

解 (1) 设按某次序打水时水龙头灌满第 i 个人的水桶需要 s_i 分钟，则第一人花费的时间为 s_1 分钟，第二人花费的时间为 (s_1+s_2) 分钟，……，第十人花费的时间为 $(s_1+s_2+\cdots+s_{10})$ 分钟，总花费时间为

$$s_1+(s_1+s_2)+\cdots+(s_1+s_2+\cdots+s_{10})=10s_1+9s_2+\cdots+2s_9+s_{10}.$$

其中，序列 $s_1,s_2,\cdots,s_{10}$ 是 $t_1,t_2,\cdots,t_{10}$ 的一个排列. 由题设，这些 t_i 各不相同，不妨设 $t_1<t_2<\cdots<t_{10}$，则由排序原理知

$$10s_1+9s_2+\cdots+2s_9+s_{10}\geqslant 10t_1+9t_2+\cdots+2t_9+t_{10}.$$

即按任意一个次序打水花费的总时间不小于按如下顺序打水的时间：先按打水所需时间从小到大依次排队，然后逐个打水，此时花费时间最省，总的花费时间为 $(10t_1+9t_2+\cdots+2t_9+t_{10})$ 分钟.

(2) 如果有两个水龙头，设总时间最少时有 m 个人在第一个水龙头打水，设依次所用时间为 $p_1,p_2,\cdots,p_m$；有 $10-m$ 个人在第二个水龙头打水，依次所需时间设为 $q_1,q_2,\cdots,q_{10-m}$.

显然必有一个水龙头的打水人数不少于 5 人，不妨设为第一个水龙头，也不可能有一个水龙头没人去打水，则 $5\leqslant m<10$.

由(1)知：$p_1<p_2<\cdots<p_m$，$q_1<q_2<\cdots<q_{10-m}$，总的花费时间为：

$$T=mp_1+(m-1)p_2+\cdots+p_m+(10-m)q_1+(9-m)q_2+\cdots+q_{10-m}.$$

其中 $\{p_1,p_2,\cdots,p_m,q_1,q_2,\cdots,q_{10-m}\}=\{t_1,t_2,\cdots,t_{10}\}$，$t_1<t_2<\cdots<t_{10}$.

首先我们来证明 $m=5$. 若不然，我们让在第一个水龙头打水的第一人到第二个水龙头的第一位去，则总的花费时间变为：

$$T' = (m-1)p_2 + \cdots + p_m + (11-m)p_1 + (10-m)q_1 + \cdots + q_{10-m}.$$

所以 $T-T' = (2m-11)p_1 > 0$，即当 $m>5$ 时，我们让第一个水龙头的第一人到第二个水龙头去后，总时间减少，故在 $m=5$ 时，总时间可能取得最小值.

由于 $m=5$，故两个水龙头人一样多，总用时为：

$$T = (5p_1+4p_2+3p_3+2p_4+p_5)+(5q_1+4q_2+3q_3+2q_4+q_5).$$

由于 $p_1<p_2<\cdots<p_5$，$q_1<q_2<\cdots<q_5$．不妨设 $p_1=t_1$．下证 $q_1<p_2$．否则我们交换用时为 q_1、p_2 的两人的位置后，总用时变为 $T''=(5p_1+4q_1+3p_3+2p_4+p_5)+(5p_2+4q_2+3q_3+2q_4+q_5)$，则 $T-T''=q_1-p_2>0$．即经交换后总时间变少，因此 $q_1<p_2$，也即 $q_1=t_2$.

类似地我们可以证明

$p_i<q_i<q_{i+1}(i=1,2,3,4)$ $p_5<q_5$，从而最省时的打水顺序为：

水龙头一：t_1,t_3,t_5,t_7,t_9；水龙头二：t_2,t_4,t_6,t_8,t_{10}，其中：$t_1<t_2<\cdots<t_{10}$.

思考题 2 设双圆 n 边形的半径分别为 R 和 r，$h_1,h_2,\cdots,h_n$ 表示外接圆圆心到各边的距离，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 表示双圆多边形的边长.

则
$$R\cos\frac{\pi}{n} \geqslant \frac{h_1+h_2+\cdots+h_n}{n} \geqslant r. \qquad (1)$$

证明 设 $\angle A_iOA_{i+1}=\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$，$A_{n+1}=A_1$，$S_n$ 为 n 边形面积，则易证

$$S_n = \frac{1}{2}R^2(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n)$$

$$= R^2\left(\sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1}{2}+\sin\frac{\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2}+\cdots+\sin\frac{\alpha_n}{2}\cos\frac{\alpha_n}{2}\right)$$

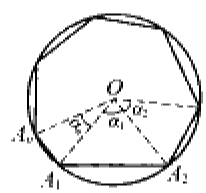


图 6-1

不妨设 $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n$，因 $\alpha_i\in(0,\pi]$，易知有

$$\sin\frac{\alpha_1}{2}\leqslant\sin\frac{\alpha_2}{2}\leqslant\cdots\leqslant\sin\frac{\alpha_n}{2},$$

$$\cos\frac{\alpha_1}{2}\geqslant\cos\frac{\alpha_2}{2}\geqslant\cdots\geqslant\cos\frac{\alpha_n}{2}.$$

根据排序不等式

$$\sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1}{2}+\sin\frac{\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2}+\cdots+\sin\frac{\alpha_n}{2}\cos\frac{\alpha_n}{2}$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\alpha_1}{2}+\sin\frac{\alpha_2}{2}+\cdots+\sin\frac{\alpha_n}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha_1}{2}+\cos\frac{\alpha_2}{2}+\cdots+\cos\frac{\alpha_n}{2}\right).$$

又 $h_i=R\cos\frac{\alpha_i}{2}(1\leqslant i\leqslant n)$，所以

$$S_n\leqslant R\,\frac{\sin\frac{\alpha_1}{2}+\cdots+\sin\frac{\alpha_n}{2}}{n}\left(R\cos\frac{\alpha_1}{2}+\cdots+R\cos\frac{\alpha_n}{2}\right)$$

$$=R\left(\sin\frac{\alpha_1}{2}+\cdots+\sin\frac{\alpha_n}{2}\right)(h_1+\cdots+h_n)/n. \qquad (2)$$

而另一方面，$S_n=\frac{1}{2}r(a_1+a_2+\cdots+a_n)$

$$=\frac{1}{2}r\left(2R\sin\frac{\alpha_1}{2}+2R\sin\frac{\alpha_2}{2}+\cdots+2R\sin\frac{\alpha_n}{2}\right)$$

$$=Rr\left(\sin\frac{\alpha_1}{2}+\sin\frac{\alpha_2}{2}+\cdots+\sin\frac{\alpha_n}{2}\right)$$

$$\leqslant R\left(\sin\frac{\alpha_1}{2}+\cdots+\sin\frac{\alpha_n}{2}\right)(h_1+h_2+\cdots+h_n)/n.$$

所以 $r\leqslant\frac{1}{n}(h_1+h_2+\cdots+h_n)$. (3)

再根据著名的琴生(Jensen)不等式，不难证明

$$\cos\frac{\alpha_1}{2}+\cos\frac{\alpha_2}{2}+\cdots+\cos\frac{\alpha_n}{2}\leqslant n\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{2n}=n\cos\frac{\pi}{n}.$$

所以 $\frac{1}{n}(h_1+h_2+\cdots+h_n)=\frac{R}{n}\left(\cos\frac{\alpha_1}{2}+\cos\frac{\alpha_2}{2}+\cdots+\cos\frac{\alpha_n}{2}\right)\leqslant R\cos\frac{\pi}{n}$. (4)

结合(3)(4)，我们已证明了不等式(1).

说明 取 $n=3$，由(1)得 $R\cos\frac{\pi}{3}\geqslant\frac{h_1+h_2+h_3}{3}\geqslant r$.

这就是著名的欧拉(Euler)不等式的一个隔离.

设 R 和 r 分别是三角形外接圆和内切圆的半径，则 $R\geqslant 2r$.

同步检测 6

1. 已知 a，b 是不相等的正数，求证：

(ⅰ) $a^4+b^4>a^3b+ab^3$；

(ⅱ) $a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3$.

2. 设 x_1，x_2，…，x_n 都是正数，求证：$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geqslant x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1$.

3. 若 $\alpha>0$，$\beta>0$，$a_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$a_1^{\alpha+\beta}+a_2^{\alpha+\beta}+\cdots+a_n^{\alpha+\beta}\geqslant a_1^\alpha a_2^\beta+a_2^\alpha a_3^\beta+\cdots+a_n^\alpha a_1^\beta.$$

4. (1998年江苏省数学夏令营试题) 设 a，b，c 均为正数，求证：

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{1}{2}(a+b+c).$$

5. 设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$. 实数 α，β 满足 $\alpha\cdot\beta>0$，求证：

$$\frac{x_1^\alpha}{x_2^\beta}+\frac{x_2^\alpha}{x_3^\beta}+\cdots+\frac{x_{n-1}^\alpha}{x_n^\beta}+\frac{x_n^\alpha}{x_1^\beta}\geqslant x_1^{\alpha-\beta}+x_2^{\alpha-\beta}+\cdots+x_n^{\alpha-\beta}.$$

6. 设正数 a、b、c 的乘积 $abc=1$，证明：$\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$.

7. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同的自然数，试证 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant a_1+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}$.

8. 设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个排列，求证：$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant n$.

9. 设正数 a，b，c 的乘积 $abc=1$，试证 $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqslant 1$.

10.（第 17 届 IMO 试题）设 x_i，y_i 是实数（$i=1,2,\cdots,n$），且 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$，$y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_n$，又 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的任一排列，证明：$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2$.

11. 已知 $0<a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$，且 $a+b+c+d=1$. 求证：$a^2+3b^2+5c^2+7d^2\geqslant 1$.

12.（1989 年全国高中数学联赛）已知 $x_i\in\mathbf{R}$（$i=1,2,\cdots,n$；$n\geqslant 2$）满足

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1,\ \sum_{i=1}^{n}x_i=0.$$

求证：$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$.

13. 设 $\frac{1}{2}\leqslant p\leqslant 1$，$a_i\geqslant 0$，$0\leqslant b_i\leqslant p$（$i=1,2,\cdots,n$，$n\geqslant 2$），满足 $\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i=1$.

求证：$b_1a_2a_3\cdots a_n+b_2a_1a_3\cdots a_n+\cdots+b_na_1a_2\cdots a_{n-1}\leqslant\frac{p}{(n-1)^{n-1}}$.

14. 设 $a\geqslant b\geqslant c>0$，求证：$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

15.（1994 年国家集训队测试题）设 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$，且 $a+b+c+d+e=1$. 求证：$ad+dc+cb+be+ea\leqslant\frac{1}{5}$.

16. 设 a_i，$b_i>0$（$i=1,2,\cdots,n$），若 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$ 且 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$ 或 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 且 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，$n\geqslant 2$，$r$，$t>0$，$m-t>0$，$s=\sum_{i=1}^{n}a_i$，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant\frac{1}{m-t}\sum_{i=1}^{n}(rs-ta_i)b_i.$$

17. 设 a_i，$b_i>0$（$i=1,2,\cdots,n$），若 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$ 且 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$ 或 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 且 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，$n\geqslant 2$，$r$，$t>0$，$s=\sum_{i=1}^{n}a_i$，则 $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\frac{1}{m+t}\sum_{i=1}^{n}(rs+ta_i)b_i$.

18. 试用排序不等式证柯西不等式.

19. 在锐角$\triangle ABC$中，$a<b<c$，记 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，$q=a\cos A+b\cos B+c\cos C$，试比较 p、q 的大小.

20. 设 h_a、h_b、h_c、$\triangle$表示$\triangle ABC$三边 a，b，c 上的高和面积，求证：对 $n\in\mathbf{R}^+$ 有

$$(ah_b)^n+(bh_c)^n+(ch_a)^n\geqslant 3\cdot 2^n\triangle^n.$$

21. 设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，求证：

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+\cdots+x_n}+\frac{x_2}{x_3+x_4+\cdots+x_n+x_1}+\cdots+\frac{x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}\geqslant\frac{n}{n-1}.$$

22. 设 $0<p\leqslant a_i\leqslant q$，$i=1,2,\cdots,n$，$b_1$，$b_2$，$\cdots$，$b_n$是 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 的一个排列，求证：

$$n\leqslant\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\leqslant n+\left[\frac{n}{2}\right]\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2.$$

23. 设 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 都是正数，且 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$ 求证：$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$.

24. 设 x，y，z 是正实数，且 $xyz=1$，证明：

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geqslant\frac{3}{4}.$$

25. 设实数 a，b，c，x，y，z 满足 $a\geqslant b\geqslant c>0$，$x\geqslant y\geqslant z>0$，求证：

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(ax+cz)(az+cx)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)}\geqslant\frac{3}{4}.$$

第7讲 凸函数及其应用

在凸分析中，凸性是集合的一种几何性质，它刻画的是所研究集合"四周鼓出"的整体性状．为了能使凸性用来刻画变化，数学家就把凸性和函数概念联系起来，从而产生了凸函数(convex function)的概念．

凸函数的出现绝非偶然，古典力学中的动能 $E=\frac{1}{2}mv^2$，就是最自然直接的凸函数，其他如熵(entropy)等皆是，当然从几何的角度而言就是抛物线．近代分析由于受凸分析研究所得之进展的影响，使得在非线性分析，非线性微分方程皆有长足之进展与突破，其中较重要的就是逐渐将非线性(nonlinearity)视为一个体，而并非只是线性化(linearization)而已．可见凸函数是数学中很重要的一块内容，它在大学数学分析、函数论、泛函分析、最优化理论中有着广泛的应用．

在不等式研究中，凸函数所发挥的重要作用是无可替代的．由于凸(凹)函数是以不等式为特征性质的一类函数，因而它们本身具有由各种确定的不等关系式刻画的许多重要性质．而且也使它们与一些常用的不等式的建立和推广存在着有机的联系，是研究不等式的重要方法之一．

在中学数学课本中，凸函数这一概念虽未曾出现，但观察历年中学奥林匹克数学竞赛及近几年全国各地高考试题，涉及凸函数知识的题目已频繁出现．有些看起来很复杂的不等式试题，如果利用凸函数的性质，会收到简捷明快、事半功倍的效果．

知识点金

1．凸函数的定义和图象特征

下面的定义是琴生(Jensen)在1905年给出的．

设连续函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$(或开区间 (a,b) 或 $a=-\infty$，或 $b=+\infty$ 都可以)，若对于区间 $[a,b]$ 内任意两点 x_1，x_2，都有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},\qquad ①$$

则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的凸函数也称下凸函数，如图 7－1. 若把①式的不等号反向，即

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)], \tag{②}$$

则称这样的 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的凹函数，也称上凸函数，如图 7－2.

凸函数的几何意义是：过 $y=f(x)$ 曲线上任意两点作弦，则弦的中点必在该曲线的上方或在曲线上.

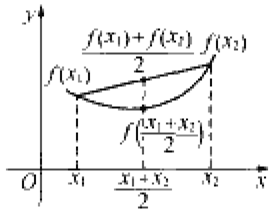


图 7－1

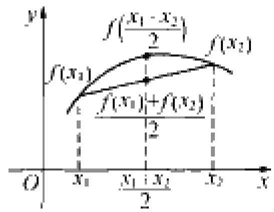


图 7－2

说明　(1) 从图象上可以看出，凹函数的两个自变量的算术平均数的函数值不小于其函数的平均值，凸函数的两个自变量的算术平均数的函数值不大于其函数的平均值.

(2) 设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则弧 PQ 的凹凸性，根据凹(凸)函数的定义，可理解为：

当且仅当 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 成立时，弧 PQ 称为是呈凸形(下凸)的；

当且仅当 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 成立时，弧 PQ 称为是呈凹形(上凸)的.

(3) 定义中的不等式可以推广到 n 个自变量，即琴生(Jensen)不等式：

若 $f(x)$ 是凸函数，则对其定义域中的任意 n 个点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]. \tag{③}$$

若①中等号当 $x_1=x_2$ 时成立，则③中等号仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立.

证明　(1) $n=2$ 时，由凸函数的定义，知结论成立.

(2) 假设 $n=k$ 时命题成立. 对 $n=k+1$，设

$$A_{k+1}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}}{k+1},$$

有 $f(A_{k+1})=f\left[\frac{(k+1)A_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{2k}\right]$

$$=f\left\{\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_k)+[x_{k+1}+(k-1)A_{k+1}]}{2k}\right\}$$

$$= f\left[\frac{\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}+\dfrac{x_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}}{2}\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right)+f\left(\frac{x_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}\right)\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)}{k}+\frac{f(x_{k+1})+(k-1)f(A_{k+1})}{k}\right]$$

即
$$(k+1)f(A_{k+1})\leqslant f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{k+1}).$$
变形即得.

类似地,对于凹函数有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\geqslant \dfrac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$.

2. 加权的琴生不等式

若 $f(x)$ 是连续的凸函数,α 和 β 是正数且 $\alpha+\beta=1$,则对 $f(x)$ 有意义的一切 x_1,x_2 均有

$$f(\alpha x_1+\beta x_2)\leqslant \alpha f(x_1)+\beta f(x_2). \qquad ④$$

若①中等号当 $x_1=x_2$ 时成立,则④中等号仅当 $x_1=x_2$ 时成立.

证明 对于任意给定的 x_1,x_2,由 $\beta=1-\alpha$,我们作函数

$$g(\alpha)=f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)-\alpha f(x_1)-(1-\alpha)f(x_2),$$

只须证明 $g(\alpha)\leqslant 0$.

由于 $g(\alpha)$ 在$[0,1]$上连续,所以 $g(\alpha)$ 在$[0,1]$上必有最大值,记为 M_0,只须证明 $M_0\leqslant 0$.用反证法.

设 $M_0>0$,并记 α_0 是$[0,1]$上使 $g(\alpha)$ 取到 M_0 的最小值,由于 $g(0)=g(1)=0$,故 $0<\alpha_0<1$,取 $\delta>0$,使 $0<\alpha_0-\delta<\alpha_0+\delta<1$,且

$$g(\alpha_0-\delta)<M_0,\ g(\alpha_0+\delta)<M_0.$$

令
$$x'_1=(\alpha_0-\delta)x_1+(1-\alpha_0+\delta)x_2,$$
$$x'_2=(\alpha_0+\delta)x_1+(1-\alpha_0-\delta)x_2,$$

有
$$f\left(\frac{x'_1+x'_2}{2}\right)\leqslant \frac{1}{2}[f(x'_1)+f(x'_2)].$$

即 $f(\alpha_0x_1+(1-\alpha_0)x_2)$

$$\leqslant \frac{1}{2}f[(\alpha_0-\delta)x_1+(1-\alpha_0+\delta)x_2]+\frac{1}{2}f[(\alpha_0+\delta)x_1+(1-\alpha_0-\delta)x_2],$$

两边减去 $\alpha_0f(x_1)+(1-\alpha_0)f(x_2)$,得

$$g(\alpha_0)\leqslant \frac{1}{2}[g(\alpha_0-\delta)+g(\alpha_0+\delta)]<\frac{1}{2}(M_0+M_0)=M_0.$$

与 $g(a_0) = M_0$ 矛盾，定理得证.

对于凹函数，上述加权的琴生不等式中的不等号反向. 加权的琴生不等式可推广到如下一般形式：

若 $f(x)$ 是连续的凸函数，则对 $f(x)$ 有意义的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，以及任意的正数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$，必有

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n), \qquad ⑤$$

若①中等号仅当 $x_1 = x_2$ 时成立，则⑤中等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立.

证明 可用数学归纳法，略.

3. 凸函数的判定方法

方法 1 利用定义：若对 $f(x)$ 定义域中任意两点 x_1, x_2，有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)],$$

或

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)],$$

则 $f(x)$ 为凸函数或凹函数.

方法 2 利用已知结论：

(1) 线性函数既是凸函数又是凹函数.

(2) 基本初等函数的凸性.

方法 3 利用函数的二阶导数：

如果函数在定义域 (a, b) 内对于任意 x 有 $f''(x) < 0$，则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是凹函数；若 $f''(x) > 0$，则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是凸函数.

例题精析

例 1 （2002 年北京市高考试题）如图 7-3 所示，$f_i(x)(i = 1, 2, 3, 4)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的四个函数，其中满足性质："对 $[0, 1]$ 中的任意 x_1 和 x_2，任意 $\lambda \in [0, 1]$，$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \leqslant \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$ 恒成立" 的只有 （　　）

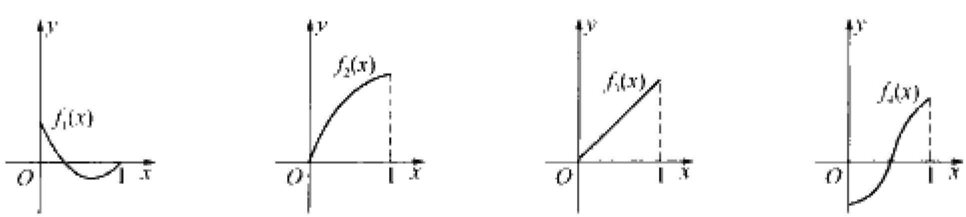


图 7-3

A. $f_1(x)$, $f_3(x)$ B. $f_2(x)$ C. $f_2(x)$, $f_3(x)$ D. $f_1(x)$

解 利用特殊值法. 因为 $\lambda \in [0, 1]$, 不妨设 $\lambda = \frac{1}{2}$, 则不等式变为 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, 其几何特征是: 连接两点 $P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$ 的线段中点 M 位于横坐标为 $\frac{x_1 + x_2}{2}$ 的曲线 $y = f(x)$ 上的点 N 上方或其上, 即凹函数或线性函数. 故知应是函数 $f_1(x)$, $f_3(x)$, 应选 A.

说明 本题以函数凹凸性的概念入题, 实际要求考生判断四个函数的凹凸性, 只要理解了题给信息即能迅速得到答案 A. 由于函数凹凸性问题相对比较"初等", 因而成为近年来高考的命题热点, 2005 年高考湖北卷第 6 题就与本题类似.

例 2 求证: $f(x) = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上是凹函数.

证明 对于任意的 $x_1, x_2 \in [0, \pi]$, 因

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{1}{2}(\sin x_1 + \sin x_2) = \sin\frac{x_1 + x_2}{2}\cos\frac{x_1 - x_2}{2} \leqslant \sin\frac{x_1 + x_2}{2},$$

即 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leqslant f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上是凹函数.

说明 $\triangle ABC$ 中, A、B、$C \in (0, \pi)$, 应用琴生不等式, 可得:

① $\frac{1}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) \leqslant \sin\frac{A + B + C}{3} = \sin\frac{\pi}{3}$,

即 $\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

② 当 $n \geqslant 1$ 时, $\frac{A}{n}$、$\frac{B}{n}$、$\frac{C}{n} \in (0, \pi)$, 类似可得

$$\sin\frac{A}{n} + \sin\frac{B}{n} + \sin\frac{C}{n} \leqslant 3\sin\frac{\pi}{3n}.$$

③ 应用均值不等式, 由上面不等式可得 $n \geqslant 1$ 时

$$\sin\frac{A}{n}\sin\frac{B}{n}\sin\frac{C}{n} \leqslant \sin^3\frac{\pi}{3n}.$$

例 3 在圆的内接 n 边形中, 试证正 n 边形的面积最大.

证明 设圆半径为 r, 内接正 n 边形的面积为 S, 各边所对的圆心角分别为 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$, 则

$$S = \frac{1}{2}r^2(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n),$$

由例 2 已证函数 $f(x) = \sin x$ 在区间 $(0, \pi)$ 内是凹函数, 由琴生(Jensen)不等式可得

$$S = \frac{1}{2}r^2(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}r^2 \cdot n \cdot \sin\frac{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n}{n}$$

$$= \frac{1}{2}r^2 \cdot n \cdot \sin\frac{2\pi}{n}.$$

当且仅当 $\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n$ 时，S 有最大值，即正 n 边形的面积最大.

例 4　设 $m\geqslant 2$ 是实数，则在 $\triangle ABC$ 中，有

$$\tan\frac{\angle A}{m}+\tan\frac{\angle B}{m}+\tan\frac{\angle C}{m}\geqslant 3\tan\frac{\pi}{3m}.$$

证明　设 $f(x)=\tan\frac{x}{m}$，$x\in(0,\pi)$，则对于 $(0,\pi)$ 内的任意两点 x_1，x_2，有

$$f(x_1)+f(x_2)=\tan\frac{x_1}{m}+\tan\frac{x_2}{m}=\frac{\sin\left(\frac{x_1+x_2}{m}\right)}{\cos\frac{x_1}{m}\cos\frac{x_2}{m}}=\frac{2\sin\left(\frac{x_1+x_2}{m}\right)}{\cos\left(\frac{x_1+x_2}{m}\right)+\cos\left(\frac{x_1-x_2}{m}\right)}$$

$$\geqslant\frac{2\sin\left(\frac{x_1+x_2}{m}\right)}{\cos\left(\frac{x_1+x_2}{m}\right)+1}=2\tan\left(\frac{x_1+x_2}{2m}\right)=2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

所以 $f(x)=\tan\frac{x}{m}$ 是 $(0,\pi)$ 上的凸函数，取 $x_1=\frac{\angle A}{m}$，$x_2=\frac{\angle B}{m}$，$x_3=\frac{\angle C}{m}$，根据琴生不等式有 $\tan\frac{\angle A}{m}+\tan\frac{\angle B}{m}+\tan\frac{\angle C}{m}\geqslant 3\tan\left[\frac{\frac{\angle A}{m}+\frac{\angle B}{m}+\frac{\angle C}{m}}{3}\right]=3\tan\frac{\pi}{3m}$.

说明　利用琴生不等式证明不等式时，很重要的一环是辅助函数要设得好，然后再根据凸(凹)函数的定义验证所设函数的凸凹性，最后一步是较容易的.

例 5　设 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，求证：$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}\geqslant\sqrt{5}$.

分析　由 $\sqrt{1+a^2}$，$\sqrt{1+b^2}$ 联想到本题可能与函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 有关，不妨从它的性质入手，就有下面的证明.

证明　设函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$，它的图象是等轴双曲线 $y^2-x^2=1$ 的上一支(如图 7－4)，易知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是凹函数，因此 $\frac{f(a)+f(b)}{2}\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，所以 $f(a)+f(b)\geqslant 2f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{5}$，与结论完全一致.

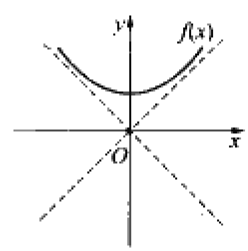


图 7－4

说明　由于有不等式 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\geqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 成立，因此可容易地将本题的不等式推广到 n 个正数的情况，即若 $a_i\in\mathbf{R}_+$ $(i=1,2,\cdots,n)$，

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$ 则 $\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{1+a_i^2} \geqslant \sqrt{1+n^2}$.

例 6 已知 $x、y、z>0$,且 $x+y+z=1$.求证:$\left(\frac{1}{x^2}+x\right)\left(\frac{1}{y^2}+y\right)\left(\frac{1}{z^2}+z\right) \geqslant \left(\frac{28}{3}\right)^3$.

证明 令 $g=\left(\frac{1}{x^2}+x\right)\left(\frac{1}{y^2}+y\right)\left(\frac{1}{z^2}+z\right)$,则 $\ln g=\ln\left(\frac{1}{x^2}+x\right)+\ln\left(\frac{1}{y^2}+y\right)+\ln\left(\frac{1}{z^2}+z\right)$.

设 $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x^2}+x\right)(0<x<1)$,则 $f'(x)=\frac{x^3-2}{x^4+x}$,

$f''(x)=\frac{-x^6+10x^3+2}{(x^4+x)^2}=\frac{-[x^3-(5+\sqrt{27})][x^3-(5-\sqrt{27})]}{(x^4+x)^2}>0$.

从而,$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是凸的.于是,由琴生不等式推得 $\ln g \geqslant 3\ln\left(3^2+\frac{1}{3}\right)=\ln\left(\frac{28}{3}\right)^3$.所以,$g \geqslant \left(\frac{28}{3}\right)^3$,即所证不等式成立.

例 7 已知:$a,b,c>0$,且 $ab+bc+ca=1$,求证:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

证明 因为 $\frac{1}{a}+6b=\frac{ab+bc+ca}{a}+6b=7b+c+\frac{bc}{a}$,

同理:$\frac{1}{b}+6c=7c+a+\frac{ca}{b}$,$\frac{1}{c}+6a=7a+b+\frac{ab}{c}$.

所以 $\frac{1}{a}+6b+\frac{1}{b}+6c+\frac{1}{c}+6a=8(a+b+c)+\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right) \leqslant 6(a+b+c)+3\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)=3\times\frac{(ab+bc+ca)^2}{abc}=\frac{3}{abc}$.设 $f(t)=\sqrt[3]{t}$,它是凹函数,由琴生不等式知 $\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3} \leqslant f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)$,

所以 $\left[\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}}{3}\right]^3 \leqslant \frac{\left(\frac{1}{a}+6b\right)+\left(\frac{1}{b}+6c\right)+\left(\frac{1}{c}+6a\right)}{3} \leqslant \frac{1}{abc}$.

所以求证式左边 $\leqslant \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$,又 $1=ab+bc+ca \geqslant 3\sqrt[3]{(abc)^2}$,

所以左边 $\leqslant \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}=\frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{abc} \leqslant \frac{1}{abc}$,即原不等式成立.

例 8 设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=1$,求证:

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\geqslant\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

证明　因为函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}(0<x<1)$ 是凸函数，故

$$\frac{1}{n}\left[\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\right]\geqslant\frac{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}{\sqrt{1-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}}. \quad ①$$

因 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$，代入上式即得 $\frac{1}{n}\left[\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\right]\geqslant\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.

又由于 $f(x)=-\sqrt{x}(x>0)$ 也是一个凸函数，于是

$$\frac{1}{n}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n})\leqslant\sqrt{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}=\frac{\sqrt{n}}{n}. \quad ②$$

由①，②即得所要证明的不等式.

例9　已知函数 $f(x)=x^2+a|x|+x$，$x\in\mathbf{R}$，$a\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，试比较 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 与 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的大小.

(2) 若 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 时，$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 与 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的大小与(1)一致，求 a 的取值范围.

解　(1) 当 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 时，$\frac{x_1+x_2}{2}\in(0,+\infty)$.

则
$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}[x_1^2+(a+1)x_1+x_2^2+(a+1)x_2]-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+(a+1)\cdot\frac{x_1+x_2}{2}\\&=\frac{1}{4}(x_1-x_2)^2\geqslant0，当且仅当 x_1=x_2 时取等号，\end{aligned}$$

即　$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，当 $x_1=x_2$ 时取等号.

(2) 当 $x\in\mathbf{R}$ 时 $f(x)=\begin{cases}x^2+(a+1)x, x\geqslant0,\\x^2+(1-a)x, x<0.\end{cases}$

显然当 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ 时，$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 恒成立.

当 $x_1\in(-\infty,0)$，$x_2\in[0,+\infty)$ 时，

此时有两种情形：$\frac{x_1+x_2}{2}\in[0,+\infty)$ 或 $\frac{x_1+x_2}{2}\in(-\infty,0)$.

若 $\frac{x_1+x_2}{2}\in[0,+\infty)$，

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}[x_1^2+(1-a)x_1+x_2^2+(a+1)x_2]-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-(a+1)\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$=\frac{1}{4}[x_1^2+x_2^2-2x_1x_2-4ax_1]$$

$$=\frac{1}{4}(x_1-x_2)^2-ax_1\geqslant 0 \text{ 恒成立.}$$

因为 $x_1\in(-\infty,0)$，所以 $a\geqslant 0$ 即可.

若 $\frac{x_1+x_2}{2}\in(-\infty,0)$，

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}[x_1^2+(1-a)x_1+x_2^2+(a+1)x_2]-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-(1-a)\cdot\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$=\frac{1}{4}[x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+4ax_2]=\frac{1}{4}(x_1-x_2)^2+ax_2\geqslant 0.$$

因为 $x_2\in[0,+\infty)$，所以 $a\geqslant 0$.

综上所述可知 $a\geqslant 0$.

说明 此题将凸函数与分段函数有机融为一体，情景新颖，背景公平，叙述简洁，入口较宽，落点不低.要求掌握二次函数的性质，比较大小的方法，分类讨论的数学思想方法等才能较好地解决.

例 10 （幂平均不等式）设 $M_r(x)$ 表示 n 个正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 r 次幂平均，即 $M_r(x)=\left(\frac{x_1^r+x_2^r+\cdots+x_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}$，$r\neq 0$.

证明：若 $\alpha>\beta$，则 $M_\alpha(x)\geqslant M_\beta(x)$，等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立.

证明 令 $f(x)=x^\mu$，$x\in(0,+\infty)$，则 $f''(x)=\mu(\mu-1)x^{\mu-2}$，
当 $\mu>1$ 或 $\mu<0$ 时，$f''(x)>0$，即 $f(x)$ 是凸函数，对于 α,β，分三种情形讨论.

(1) $\alpha>\beta>0$，则 $\frac{\alpha}{\beta}>1$，因此 $f(x)=x^{\frac{\alpha}{\beta}}$ 是凸函数，由琴生不等式，得

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\leqslant\frac{x_1^{\frac{\alpha}{\beta}}+x_2^{\frac{\alpha}{\beta}}+\cdots+x_n^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n}.$$

两边同乘以 $\frac{1}{\alpha}$ 次，并用 x_i^β 代替 x_i，即得 $\left(\frac{x_1^\alpha+x_2^\alpha+\cdots+x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant\left(\frac{x_1^\beta+x_2^\beta+\cdots+x_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$.

(2) $0>\alpha>\beta$，则 $\frac{\beta}{\alpha}>1$，$f(x)=x^{\frac{\beta}{\alpha}}$ 是凸函数，与(1)类似，注意到 $\beta<0$，两边乘 $\frac{1}{\beta}$ 次后不等式要改变方向，即得 $M_\alpha(x)\geqslant M_\beta(x)$.

(3) $\alpha>0>\beta$，这时 $\frac{\alpha}{\beta}<0$，$f(x)=x^{\frac{\alpha}{\beta}}$ 是凸函数，类似(1)的证明，可得 $M_\alpha(x)\geqslant M_\beta(x)$.

说明 进一步，我们还可以证明存在极限

$$M_{+\infty}(x)=\lim_{r\to+\infty}M_r(x)=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},$$

$$M_0(x)=\lim_{r\to 0}M_r(x)=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

根据上面定义的 $M_{+\infty}(x)$、$M_0(x)$，对 $\beta<0<\alpha$，有 $M_\beta(x)\leqslant M_0(x)\leqslant M_\alpha(x)\leqslant M_{+\infty}(x)$.

例 11 （第 13 届全国中学生数学冬令营试题）设 $n\geqslant 2$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均为实数，且 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}=1$，对每一个固定的 $k(k\in\mathbf{Z},1\leqslant k\leqslant n)$，求 $|x_k|$ 的最大值.

解 由已知条件得 $2\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}=2$，即

$$x_1^2+(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+\cdots+(x_{n-2}+x_{n-1})^2+(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2=2. \quad (1)$$

由幂平均值不等式，得 $\sqrt{\frac{x_1^2+(x_1+x_2)^2+\cdots+(x_{k-1}+x_k)^2}{k}}$

$$\geqslant\frac{|x_1|+|x_1+x_2|+\cdots+|x_{k-1}+x_k|}{k}$$

$$\geqslant\frac{|x_1-(x_1+x_2)+\cdots+(-1)^{k-1}(x_{k-1}+x_k)|}{k}=\frac{|x_k|}{k},$$

即
$$x_1^2+(x_1+x_2)^2+\cdots+(x_{k-1}+x_k)^2\geqslant\frac{x_k^2}{k}. \quad (2)$$

同理，有 $\sqrt{\frac{(x_k+x_{k+1})^2+\cdots+(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2}{n-k+1}}$

$$\geqslant\frac{|x_k+x_{k+1}|+\cdots+|x_{n-1}+x_n|+|x_n|}{n-k+1}$$

$$\geqslant\frac{|x_n-(x_{n-1}+x_n)+\cdots+(-1)^{n-k}(x_k+x_{k+1})|}{n-k+1}\geqslant\frac{|x_k|}{n-k+1},$$

即 $(x_k+x_{k+1})^2+\cdots+(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2\geqslant\frac{x_k^2}{n-k+1}$. (3)

由(2)+(3)及(1)得 $2\geqslant\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1}\right)x_k^2$，

即
$$|x_k|\leqslant\sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}\ (k=1,2,\cdots n). \quad (4)$$

由上可知，当且仅当 $x_1=-(x_1+x_2)=x_2+x_3=\cdots=(-1)^{k-1}(x_{k-1}+x_k)$ 及 $x_k+x_{k+1}=$

$-(x_{k+1}+x_{k+2})=\cdots=(-1)^{n-k}x_n$ 时，(4) 中的等号成立，即当且仅当 $x_i=x_k\cdot(-1)^{i-k}\cdot\frac{i}{k}$ $(i=1,2,\cdots,k-1)$ 且 $x_j=x_k\cdot(-1)^{j-k}\cdot\frac{n+1-j}{n-k+1}$ $(j=k+1,k+2,\cdots,n)$ 时 $|x_k|=\sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}$.

综上所述，可得 $|x_k|_{max}=\sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}$.

例 12 (Hölder 不等式) $a_i,b_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 $2n$ 个正实数，$\alpha,\beta>0$，$\alpha+\beta=1$，则

$$a_1^{\alpha}b_1^{\beta}+a_2^{\alpha}b_2^{\beta}+\cdots+a_n^{\alpha}b_n^{\beta}\leqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{\alpha}(b_1+b_2+\cdots+b_n)^{\beta}.$$

证明 令 $A=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$B=b_1+b_2+\cdots+b_n$，因 $f(x)=-\lg x$ 是一个连续的凸函数，所以由 Jensen 不等式有

$$\alpha\lg\frac{a_i}{A}+\beta\lg\frac{b_i}{B}=\frac{\alpha\lg\frac{a_i}{A}+\beta\lg\frac{b_i}{B}}{\alpha+\beta}\leqslant\lg\frac{\alpha\cdot\frac{a_i}{A}+\beta\cdot\frac{b_i}{B}}{\alpha+\beta}=\lg\left(\alpha\cdot\frac{a_i}{A}+\beta\cdot\frac{b_i}{B}\right),$$

所以 $\left(\frac{a_i}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_i}{B}\right)^{\beta}\leqslant\alpha\cdot\frac{a_i}{A}+\beta\cdot\frac{b_i}{B}$. i 取遍 $1,2,\cdots,n$，并将所有这些不等式相加，得

$$\left(\frac{a_1}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_1}{B}\right)^{\beta}+\left(\frac{a_2}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_2}{B}\right)^{\beta}+\cdots+\left(\frac{a_n}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_n}{B}\right)^{\beta}$$
$$\leqslant\alpha\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{A}+\beta\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{B}=\alpha+\beta=1,$$

从而 $a_1^{\alpha}b_1^{\beta}+a_2^{\alpha}b_2^{\beta}+\cdots+a_n^{\alpha}b_n^{\beta}\leqslant A^{\alpha}\cdot B^{\beta}=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{\alpha}\cdot(b_1+b_2+\cdots+b_n)^{\beta}$.

说明 ①用数学归纳法可将 Hölder 不等式推广为：

$a_{ij}>0$ 时，对 $k_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$，$\sum_{i=1}^{n}k_i=1$，有 $a_{11}^{k_1}a_{21}^{k_2}\cdots a_{n1}^{k_n}+a_{12}^{k_1}a_{22}^{k_2}\cdots a_{n2}^{k_n}+a_{1n}^{k_1}a_{2n}^{k_2}\cdots a_{nn}^{k_n}$
$\leqslant(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})^{k_1}(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})^{k_2}\cdots(a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})^{k_n}$.

Hölder 不等式的最简单情形为 $a_1^{\alpha}b_1^{\beta}+a_2^{\alpha}b_2^{\beta}\leqslant(a_1+a_2)^{\alpha}(b_1+b_2)^{\beta}$，$(\alpha+\beta=1)$. 利用 Hölder 不等式可解决较复杂的一些不等式问题.

② 令 $A_i=a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_n}(1\leqslant i\leqslant n)$，

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_n})^{p}=\sum_{i=1}^{n}(a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_n})\cdot A_i^{p-1}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}a_{i_1}A_i^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}a_{i_2}A_i^{p-1}+\cdots+\sum_{i=1}^{n}a_{i_n}A_i^{p-1}. \qquad ①$$

由 Hölder 不等式，有 $\sum_{i=1}^{n}a_{i_1}A_i^{p-1}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i_1}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}A_i^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i2}A_i^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i2}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{im}A_i^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_{im}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

这里$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$(p-1)q=p$. 将这些不等式代入 ①，化简即得如下的闵可夫斯基不等式：设 $a_{ij}>0$，$p>1$，则

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{im})^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_{i1}^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i2}^p\right)^{\frac{1}{p}}+\cdots+\left(\sum_{i=1}^{n}a_{im}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

显然，三角不等式即若 a_i，b_i 都是实数($i=1,2,\cdots,n$)，则

$$\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}$$
$$\leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$$

是闵可夫斯基不等式的一个特殊情形.

思考交流

思考题 1 用函数 $f(x)=\lg x$ 的凸性证明：

(1) 对 $a_i>0$，有 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

(2) 对 $a_i>0$，$x_i>0$，有

$$\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\geqslant(x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n})^{\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}}.$$

证明 (1) 因为 $\lg x$ 在$(0,+\infty)$上为凹函数，有

$$\lg\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\frac{1}{n}(\lg a_1+\lg a_2+\cdots+\lg a_n)$$
$$=\lg\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

再由 $\lg x$ 为增函数，得 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

(2) 记 $\lambda_i=\frac{a_i}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$，代入加权的琴生不等式，有 $\lg(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)$

$$\geqslant\lambda_1\lg x_1+\lambda_2\lg x_2+\cdots+\lambda_n\lg x_n$$
$$=\lg x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}.$$

再由 $\lg x$ 为增函数得 $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n\geqslant x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}$.

即
$$\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\geqslant(x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n})^{\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}}.$$

定理 1 对于连续函数 $f(x)$，$x\in(a,b)$ 来说，如对任意的 x_1、$x_2\in(a,b)$，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)],\qquad ①$$

等号当且仅当 $x_1=x_2$ 时成立．则对任意的 $x_i\in(a,b)(i=1,2,\cdots,n)$，必有

$$f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_if(x_i),\qquad ②$$

等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立，这里 $\lambda_i>0$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$．

对①⇒②作变换，就可得如下的函数不等式：

定理 2 对于定义在(a,b)上的正值连续函数 $g(x)$来说，如对任意的 x_1、$x_2\in(a,b)$，有

$$g(\frac{x_1+x_2}{2})\leqslant\sqrt{g(x_1)\cdot g(x_2)},$$

等号当且仅当 $x_1=x_2$ 时成立．则对任意的 $x_i\in(a,b)$，有 $g(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ix_i)\leqslant\prod\limits_{i=1}^{n}g^{\lambda_i}(x_i)$，等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立，这里 $\lambda_i>0$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$．

证明 在定理 1 中令 $f(x)=\ln g(x)$，即得定理 2．

定理 3 对于定义在 $(a,b)(\subseteq\mathbf{R}^+)$ 上的连续函数 $h(x)$ 来说，如对任意的 x_1、$x_2\in(a,b)$，有 $h(\sqrt{x_1x_2})\leqslant\frac{1}{2}[h(x_1)+h(x_2)]$，等号当且仅当 $x_1=x_2$ 时成立．则对任意的 $x_i\in(a,b)$，必有 $h(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{\lambda_i})\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ih(x_i)$，等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立．这里 $\lambda_i>0$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$．

证明 在⑥、⑦中作变换：$f(x)=h(e^x)$，$\ln x_i\to x_i(i=1,2,\cdots,n)$，即得定理 3．

说明 对于正数 x_1、x_2 来说，$x_1+x_2\geqslant2\sqrt{x_1x_2}$ 恒成立，由定理 3 可推出不等式：

$x_i>0$，$\lambda_i>0$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ 时，有 $\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{\lambda_i}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ix_i$

令 $\lambda_i=\dfrac{a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}$，上面不等式就变为思考题 1 中证明的不等式．

定理 4 对于定义在 $(a,b)(\subseteq\mathbf{R}^+)$ 上的正值连续函数 $\phi(x)$ 来说，如对任意的 x_1、$x_2\in(a,b)$，有 $\phi(\sqrt{x_1x_2})\leqslant\sqrt{\phi(x_1)\phi(x_2)}$，　　$(*)$

等号当且仅当 $x_1=x_2$ 时成立．则对任意的 $x_i\in(a,b)$，有 $\phi(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{\lambda_i})\leqslant\prod\limits_{i=1}^{n}\phi^{\lambda_i}(x_i)$，

等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立. 这里 $\lambda_i>0$，且 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$.

证明 在定理 3 中令 $h(x)=\ln\phi(x)$ 即得证.

说明 满足(∗)的函数 $\phi(x)$ 称为几何凸函数. 四个定理中的函数不等式，是我们常见的一些不等式的共同来源.

思考题 2 (2006 年中国数学奥林匹克试题)实数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=\frac{1}{2}$，$a_{k+1}=-a_k+\frac{1}{2-a_k}$，$k=1,2,\cdots$. 证明不等式

$$\left[\frac{n}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}-1\right]^n\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right).$$

证明 首先，用数学归纳法证明 $0<a_n\leqslant\frac{1}{2}$，$n=1,2,\cdots$

$n=1$ 时，命题显然成立. 假设命题对 $n(n\geqslant1)$ 成立，即有 $0<a_n\leqslant\frac{1}{2}$.

设 $f(x)=-x+\frac{1}{2-x}$，$x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，则 $f(x)$ 是减函数，于是

$$a_{n+1}=f(a_n)\leqslant f(0)=\frac{1}{2},$$

$$a_{n+1}=f(a_n)\geqslant f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}>0.$$

即命题对 $n+1$ 也成立.

原命题等价于

$$\left(\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^n\left[\frac{n}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}-1\right]^n\leqslant\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right).$$

设 $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}-1\right)$，$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，则 $f(x)$ 是凸函数，即对 $0<x_1,x_2<\frac{1}{2}$，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

事实上，$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 等价于

$$\left(\frac{2}{x_1+x_2}-1\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\left(\frac{1}{x_2}-1\right)\Leftrightarrow(x_1-x_2)^2\geqslant0.$$

所以，由 Jensen 不等式可得

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},$$

即

$$\left(\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}-1\right)^n\leqslant\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right).$$

另一方面，由题设及 Cauchy 不等式，可得

$$\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+a_{i+1}}-n\geqslant\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1})}-n$$

$$=\frac{n^2}{a_{n+1}-a_1+2\sum_{i=1}^{n}a_i}-n\geqslant\frac{n^2}{2\sum_{i=1}^{n}a_i}-n=n\left(\frac{n}{2\sum_{i=1}^{n}a_i}-1\right),$$

所以 $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\geqslant\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\left(\frac{n}{2\sum_{i=1}^{n}a_i}-1\right),$$

故 $$\left(\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^n\cdot\left[\frac{n}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}-1\right]^n$$

$$\leqslant\left[\frac{(1-a_1)+(1-a_2)+\cdots+(1-a_n)}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right]^n\leqslant\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right),$$

从而原命题得证.

同步检测 7

1. 在 $y=2^x$，$y=\log_2 x$，$y=x^2$，$y=\cos 2x$ 这四个函数中，当 $0<x_1<x_2<1$ 时，使 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 恒成立的函数的个数是　　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. $f(x)$ 为奇函数，且当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，则当 $x<0$ 时，$f(x)$ 是　　(　　)

A. 单调上升的凸函数　　B. 单调下降的凸函数

C. 单调上升的凹函数　　D. 单调下降的凹函数

3. 若 $f(x)=\tan x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则对 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$，$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 与 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 的关系为　　(　　)

A. $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$　　B. $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$

C. $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$　　D. 不能确定

4. 设 α,β,γ 是钝角三角形的三个内角，则 $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$ 与 $\frac{27}{\pi^2}$ 的关系为　　(　　)

A. $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}>\frac{27}{\pi^2}$　　B. $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\frac{27}{\pi^2}$

C. $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}<\frac{27}{\pi^2}$　　　　　　　　D. 不能确定

5. 观察函数 $f(x)=x^2(x\geqslant 0)$ 和 $g(x)=\sqrt{x}(x\geqslant 0)$ 的图象，考虑二者的差异，并将这种差异定量化，请你由这种差异抽象总结出函数一种一般化的性质　　(　　)

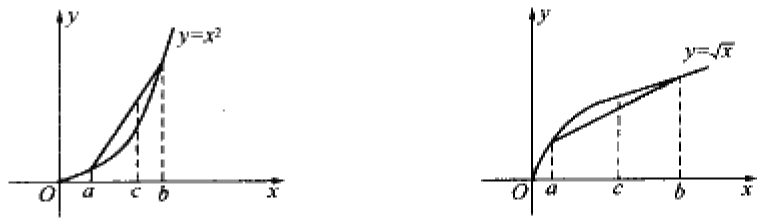


图 7-5

A. 设 $0<a<b$，则 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2}$，$g\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{g(a)+g(b)}{2}$

B. 设 $0<a<b,\lambda>0$，则 $f\left(\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}\right)<\frac{f(a)+\lambda f(b)}{1+\lambda}$，$g\left(\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}\right)<\frac{g(a)+\lambda g(b)}{1+\lambda}$

C. 设 P 为函数 $f(x)=x^2(x\geqslant 0)$ 图象上任意一点，则函数图象在 P 处的切线斜率 k 是 P 点横坐标 x_p 的增函数

D. 设 P 为函数 $g(x)=\sqrt{x}(x\geqslant 0)$ 图象上任意一点，则函数图象在 P 处的切线斜率 k 是 P 点横坐标 x_p 的增函数

6. (第 14 届"希望杯"高一第 1 试)函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 $(-1,4)$，对于定义域内不等正实数 x_1,x_2 都有 $f(x_1)+f(x_2)<2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，请写出两个满足条件的(不同类型的)函数解析式是__________，__________.

7. 若 a,b,c,d 为正数，且 $a+b+c+d=\sqrt{7960}$，则 $a^2+b^2+c^2+d^2$ 的最小值是________.

8. 若 $a>0,b>0$，且 $a+2b=6$，则 $\lg a+2\lg b$ 的最大值是________.

9. 判断下列函数的凹凸性.

(1) $f(x)=a^x(a>0)$ 是________.

(2) $f(x)=\lg x$ 是________.

10. 集合 A 是由适合以下性质的函数 $f(x)$ 构成的：对于任意的 $x>0,y>0$，且 $x\neq y$，都有 $f(x)+2f(y)>3f\left(\frac{x+2y}{3}\right)$.

试判断(回答是或不是)：

(1) $f_1(x)=\log_2 x$ ________ 在集合 A 中；

(2) $f_2(x)=(x+1)^2$ ________ 在集合 A 中.

11. (2001 年北京高考题)定义在 D 上的函数 $f(x)$ 如果满足：对任意 $x_1,x_2\in D$，都有

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，则称 $f(x)$ 是 D 上的凸函数.

已知二次函数 $f(x)=ax^2+x(a\in\mathbf{R}$，且 $a\neq 0)$.(1) 求证：当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是凸函数；(2) 如果 $x\in[0,1]$ 时，$|f(x)|\leqslant 1$，试求 a 的取值范围.

12. 若 $x_i\geqslant 0$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=100$，求证 $10\leqslant\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\leqslant 10\sqrt{n}$.

13. 已知 $x、y、z\geqslant 0$，且 $x+y+z=\frac{1}{2}$，求证：$\frac{\sqrt{x}}{4x+1}+\frac{\sqrt{y}}{4y+1}+\frac{\sqrt{z}}{4z+1}\leqslant\frac{3\sqrt{6}}{10}$.

14. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足：如果对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，都有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，则称函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的凹函数.

已知二次函数 $f(x)=ax^2+x(a\in\mathbf{R},a\neq 0)$.

(1) 求证：当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 是凹函数；

(2) 如果 $x\in[0,1]$ 时，$|f(x)|\leqslant 1$，试求实数 a 的范围.

15. (2005 年普通高等学校招生全国统一考试理科数学试题)

(Ⅰ) 设函数 $f(x)=x\log_2 x+(1-x)\log_2(1-x)(0<x<1)$，求 $f(x)$ 的最小值；

(Ⅱ) 设正数 $p_1,p_2,\cdots,p_{2^n}$ 满足 $p_1+p_2+\cdots+p_{2^n}=1$，证明：

$$p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+\cdots+p_{2^n}\log_2 p_{2^n}\geqslant -n.$$

16. (2004 年高考全国卷Ⅱ试题)已知函数 $g(x)=x\ln x$，设 $0<a<b$，证明：

$$g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)>0.$$

17. 已知：$a>0,b>0,0<\lambda\leqslant\frac{1}{2}$，求证：

$$(a^\lambda+b^\lambda)\cdot\left[\frac{1}{(2a+b)^\lambda}+\frac{1}{(a+2b)^\lambda}\right]\leqslant\frac{4}{3^\lambda}.$$

18. 已知 $x\geqslant 3$.

(1) 当 $0<t<1$ 时，有不等式 $x^t-(x-1)^t<(x-2)^t-(x-3)^t$；

(2) 当 $t<1$ 时，有不等式 $x^t-(x-1)^t>(x-2)^t-(x-3)^t$.

19. (美国大学生数学竞赛题)设 $0<x_i<\pi(i=1,2,\cdots n)$，且令 $x=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，

证明：
$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin x_i}{x_i}\leqslant\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n.$$

20. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，求证：$\angle PAB、\angle PBC、\angle PCA$ 中至少有一个小于或等于 $30°$.

21. 对所有正实数 $a、b、c$，证明：$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1$.

22. (第 45 届 IMO 预选题) 设 $a、b、c>0$，且 $ab+bc+ca=1$. 证明：不等式

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\leqslant\frac{1}{abc}.$$

23. 设 $a_i \in \mathbf{R}^+ (i=1,2,\cdots,n)$，$k \geqslant 1$，求证：

$$\left(\frac{a_1}{a_2+\cdots+a_n}\right)^k+\left(\frac{a_2}{a_1+a_3+\cdots+a_n}\right)^k+\cdots+\left(\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}\right)^k \geqslant \frac{n}{(n-1)^k}.$$

24. 已知 $x_i > 0 (i=1,2,\cdots,n)$，$x_1+x_2+\cdots+x_n \geqslant x_1 x_2 \cdots x_n (n \geqslant 2)$，且 $1 \leqslant a \leqslant n$. 求证：$\dfrac{x_1^a+x_2^a+\cdots+x_n^a}{x_1 x_2 \cdots x_n} \geqslant n^{\frac{a-1}{n-1}}$.

25. $a_i, b_i (i=1,2,\cdots,n)$ 为正数，$-1<m<0$，则

$$\frac{a_1^{m+1}}{b_1^m}+\frac{a_2^{m+1}}{b_2^m}+\cdots+\frac{a_n^{m+1}}{b_n^m} \leqslant \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{m+1}}{(b_1+b_2+\cdots+b_n)^m},$$

（只限于 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ 时，等号成立）

第[illegible]讲　抽象函数不等式

知识点金

含有未给出具体表达式的函数的不等式，称为抽象函数不等式.

在高考和各级各类高中数学竞赛中，与抽象函数不等式有关的问题频频出现，且往往是把关的难题. 由于这类试题具有一定的抽象性，其函数性质隐而不露，因而解答此类问题时思维常易受阻.

准确理解刻画抽象函数本质属性的特征量，创造性地使用根据特征量归纳出来的对应法则和函数性态，是求解抽象函数不等式问题的关键.

解答这类问题的常用方法有：待定系数法、不等式法、反证法、赋值法、取极限法、分类讨论法、数学归纳法、构造法等等，并且仅以初等数学为工具，解答方法富于技巧，对人类的智慧具有明显的挑战性.

例题精析

例 1　设 $f(x)=x^n$，$x\in D$，$n\in \mathbf{N}^*$，试判断 $f(x)=x^n$ 是否为函数不等式

$$f(x)+f(1-x)>1 \tag{1}$$

的一个解. 如是，求出定义域 D；若不是，请说明理由.

解　若 $f(x)$ 是不等式(1)的解，等价于 $x^n+(1-x)^n>1$　　(2)

有解.

当 $n=1$ 时，(2)式为 $1>1$，矛盾.

当 $n>1$ 时，令 $t=x-\frac{1}{2}$，则(2)式等价于 $\left(t+\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}-t\right)^n>1$.　　(3)

由于 $\left(\frac{1}{2}+t\right)^n+\left(\frac{1}{2}-t\right)^n=2\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}t^2+C_n^4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}t^4+\cdots$.

令 $g(u)=2\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u+C_n^4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}u^2+\cdots$.

则 $g(u)$ 是 $[0,+\infty)$上的单调增函数.

(3) 式$\Leftrightarrow g(t^2)>g(\frac{1}{4})\Leftrightarrow t^2>\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2>\frac{1}{4}\Leftrightarrow x>1$ 或 $x<0$.

可见,此时 $f(x)$是不等式(1)的一个解,定义域 $D=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

综上,当 $n=1$ 时,$f(x)$不是不等式(1)的解;当 $n>1$ 时,$f(x)$可以是不等式(1)的一个解,其定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$,或其子集 D'(满足 $x\in D'$,必有$(1-x)\in D'$).

例 2 设 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}$,对任意 $m,n\in\mathbf{N}^*$,有 $f(m+n)\geqslant f(m)+f(n)$,且知$f(2)=0$,$f(3)>0$,$f(9999)=3333$,求 $f(1997)$.

解 由已知条件 $f(m+n)\geqslant f(m)+f(n)$. (1)

令 $m=n=1$,由(1)式得 $f(2)\geqslant 2f(1)$,由 $f(2)=0$ 及 $f(1)\geqslant 0$ 可得 $f(1)=0$. 设$m+n=3$,$m=2$,容易求得 $f(3)=1$. 设 $k\in\mathbf{N}^*$,则 $f(3k)=f[3(k-1)+3]\geqslant f[3(k-1)]+f(3)=f[3(k-1)]+1$,$f[3(k-1)]=f[3(k-2)+3]\geqslant f[3(k-2)]+f(3)=f[3(k-2)]+1$,故

$$f(3k)\geqslant f[3(k-1)]+1\geqslant f[3(k-2)]+2\geqslant\cdots\geqslant k. \tag{2}$$

由已知 $f(3\times 3333)=3333$,有理由猜想,如果 $k<3333$,则有 $f(3k)=k$. 今用反证法证明.

设某 $k_0<3333$,但 $f(3k_0)\neq k_0$,则由(2) 式可得 $f(3k_0)>k_0$,设 $f(3k_0)\geqslant k_0+1$,则 $f(9999)\geqslant f[(9999-3k_0)+3k_0]\geqslant(3333-k_0)+(k_0+1)>3333$,这个结果与题设矛盾,故只有 $f(3k)=k$,由此可得 $f(3\times 1997)=1997$. 又 $f(3\times 1997)\geqslant f(2\times 1997)+f(1997)>3f(1997)$,故 $f(1997)\leqslant 1997/3<666$. 又 $f(1997)=f(1995+2)\geqslant f(1995)+f(2)=f(3\times 665)+0=665$,和上式相比较,求得 $f(1997)=665$.

例 3 设 $f(x)$ 为二次函数,且 $f(0)=12$,

$$g(x)=2^x f(x), \quad ①$$

$$g(x+1)-g(x)\geqslant 2^{x+1}x^2. \quad ②$$

求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的表达式.

解 由于 $f(x)$ 为二次函数,可用待定系数法设为 $f(x)=ax^2+bx+12(a\neq 0)$. ③

又由 ① 代入 ② 有 $2^{x+1}f(x+1)-2^x f(x)\geqslant 2^{x+1}x^2$,

即 $$2f(x+1)-f(x)\geqslant 2x^2. \quad ④$$

将 ③ 代入 ④,得 $ax^2+(4a+b)x+(2a+2b+12)\geqslant 2x^2$, ⑤

有(1) $$a=2,b=-8.$$

于是 $$f(x)=2x^2-8x+12,$$

$$g(x) = (2x^2 - 8x + 12)2^x,$$

检验知为所求.

或　(2) $a \neq 2$ 时，$\begin{cases} a > 2, \\ \Delta = (4a + b)^2 - 4(a-2)(2a+2b+12) \leqslant 0. \end{cases}$

即　$8(a+1)^2 + (b-16)^2 \leqslant 168\ (a > 2)$，$2 < a \leqslant \sqrt{21 - \frac{1}{8}(b-16)^2} - 1$.

综上，$f(x) = 2x^2 - 8x + 12$，$g(x) = (2x^2 - 8x + 12)2^x$，或

$f(x) = ax^2 + bx + 12$，$g(x) = (ax^2 + bx + 12)2^x$，其中 a,b 满足 $2 < a \leqslant \sqrt{21 - \frac{1}{8}(b-16)^2} - 1$.

说明　如果能预知函数的结构，那就可用待定系数先表示出来，问题归结为系数的确定，通常是解方程组求出待定系数的具体数值.

例 4　设 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上恒为正数且对任何 $x, y \in (0, 1)$ 均有

$$\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(1-x)}{f(1-y)} \leqslant 2.$$

求证：$f(x)$ 一定是常数函数.

证明　对任意的 x、$y \in (0, 1)$，必有 $(1-x)$，$(1-y) \in (0, 1)$. 代入已知条件

$$\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(1-x)}{f(1-y)} \leqslant 2,$$

$$\frac{f(y)}{f(x)} + \frac{f(1-y)}{f(1-x)} \leqslant 2.$$

相加并用基本不等式，有

$$4 \geqslant \left[\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\right] + \left[\frac{f(1-x)}{f(1-y)} + \frac{f(1-y)}{f(1-x)}\right] \geqslant 2 + 2 = 4.$$

等号成立当且仅当 $\begin{cases} f(x) = f(y), \\ f(1-x) = f(1-y). \end{cases}$

由 x，y 的任意性，得 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为常数函数.

说明　在定义域上证明 $f(x) = f(y)$，这是推出 $f(x)$ 为常数函数的常用方法.

例 5　设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+3) \leqslant f(x) + 3$ 和 $f(x+2) \geqslant f(x) + 2$，令 $g(x) = f(x) - x$.

(1) 求证 $g(x)$ 是周期函数；(2) 如果 $f(994) = 992$，求 $f(2008)$.

解　(1) 由 $g(x) = f(x) - x$，

得　$g(x+2) = f(x+2) - x - 2$，

$g(x+3) = f(x+3) - x - 3$.

由　$f(x+3) \leqslant f(x) + 3$ 和 $f(x+2) \geqslant f(x) + 2$ 代入得

$$g(x+2) \geqslant f(x)+2-x-2 = f(x)-x, \qquad ①$$

$$g(x+3) \leqslant f(x)+3-x-3 = f(x)-x, \qquad ②$$

由 ① 得 $g(x+4) \geqslant f(x+2)-x-2 \geqslant f(x)+2-x-2 = f(x)-x,$ ③

$$g(x+6) \geqslant f(x+2)-x-2 \geqslant f(x)+2-x-2 = f(x)-x, \qquad ④$$

由 ② 得 $g(x+6) \leqslant f(x+3)-x-3 \leqslant f(x)-x.$ ⑤

由 ④、⑤ 得 $g(x+6) = f(x)-x = g(x)$，$g(x)$ 以 6 为周期.

(2) $2008-994=1014$ 是 6 的倍数，所以 $g(2008)=g(994)$，即 $f(2008)-2008=f(994)-994$，所以 $f(2008)=f(994)+1014=2008$.

说明 这里用不等式法推证的依据是若 $A \leqslant B \leqslant A$，则 $A=B$.

例 6 设函数 $f(x)$ 对 $x \geqslant 0$ 有定义，且满足条件：

(1) 对任何 $x, y \geqslant 0$，$f(x)f(y) \leqslant y^2 f\left(\frac{x}{2}\right)+x^2 f\left(\frac{y}{2}\right)$.

(2) 存在常数 $M>0$，当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$|f(x)| \leqslant M$.

求证：$f(x) \leqslant x^2$.

证明 假设存在 $x_0 \geqslant 0$，使 $f(x_0) > x_0^2$，由条件(1) 得 $f^2(0) \leqslant 0$，所以 $f(0)=0$，从而 $x_0>0$. 又由(1) 得 $f^2(x_0) \leqslant 2x_0^2 f\left(\frac{x_0}{2}\right)$，于是有 $f\left(\frac{x_0}{2}\right) \geqslant \frac{f^2(x_0)}{2{x_0}^2} > \frac{1}{2}x_0^2$.

用数学归纳法不难证明对于任意正整数 k，$f\left(\frac{x_0}{2^k}\right) > 2^{2^k \ 2k-1}x_0^2$ (1) 成立.

显然存在正整数 k_0，使得当 $k \geqslant k_0$ 时，有 $0<\frac{x_0}{2^k} \leqslant 1$ 成立，由(2) 及(1) 可知 $k \geqslant k_0$ 时，有

$$2^{2^k-2k-1}x_0^2 < M. \qquad (1)$$

由于 M 为固定常数，(1) 显然不可能对任意 $k \geqslant k_0$ 成立，矛盾.

例 7 （第 31 届俄罗斯数学奥林匹克竞赛题）是否存在有界函数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，使得 $f(1)>0$，且对一切的 $x, y \in \mathbf{R}$，都有 $f^2(x+y) \geqslant f^2(x)+2f(xy)+f^2(y)$ 成立？

解 不存在.

任取 $x_1 \neq 0$，令 $y_1=\frac{1}{x_1}$，有 $f^2(x_1+y_1) \geqslant f^2(x_1)+2f(1)+f^2(y_1) \geqslant f^2(x_1)+a$

其中 $a=2f(1)>0$.

令 $x_n=x_{n-1}+y_{n-1}$，$y_n=\frac{1}{x_n}$，$n \geqslant 2$.

于是有
$$f^2(x_n+y_n) \geqslant f^2(x_n)+a = f^2(x_{n-1}+y_{n-1})+a$$
$$\geqslant f^2(x_{n-1})+2a \geqslant \cdots \geqslant f^2(x_1)+na,$$

故数列 $\{f(x_n)\}$ 不是有界的，与条件矛盾.

说明 去掉条件"$f(x)$是有界函数"，有明显的一个解 $f(x)=x$. 是否还有其他解，值得我

们进一步探索.

例 8 (2004 年江苏省高考试题)已知函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足下列条件：对任意的实数 x_1、x_2，都有 $\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]$ 和 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|$，其中 λ 是大于零的常数. 设实数 a_0、a、b 满足 $f(a_0)=0$ 和 $b=a-\lambda f(a)$. 证明：

(1) $\lambda\leqslant 1$，并且不存在 $b_0\neq a_0$，使得 $f(b_0)=0$；

(2) $(b-a_0)^2\leqslant(1-\lambda^2)(a-a_0)^2$；

(3) $[f(b)]^2\leqslant(1-\lambda^2)[f(a)]^2$.

证明 (1) 任取 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1\neq x_2$，由

$$\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)], \quad ①$$

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|, \quad ②$$

可知 x_1-x_2 与 $f(x_1)-f(x_2)$ 同号，则有

$$|(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]|=(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)].$$

由 ①、② 知 $\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]$

$$=|x_1-x_2||f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2||x_1-x_2|.$$

因为 $x_1\neq x_2$，所以 $\lambda\leqslant 1$.

假设有 $b_0\neq a_0$，使 $f(b_0)=0$ 成立，则由 ① 知

$$0<\lambda(a_0-b_0)^2\leqslant(a_0-b_0)[f(a_0)-f(b_0)]=(a_0-b_0)\cdot(0-0)=0.$$

又 $0<\lambda\leqslant 1$，所以 $(a_0-b_0)^2\leqslant 0$，则必有 $a_0=b_0$，这与 $b_0\neq a_0$ 矛盾.

所以不存在 $b_0\neq a_0$，使得 $f(b_0)=0$.

(2) 由 $f(a_0)=0$ 和 $b=a-\lambda f(a)$， ③

知 $(b-a_0)^2=[a-a_0-\lambda f(a)]^2=[(a-a_0)-\lambda(f(a)-f(a_0))]^2$

$$=(a-a_0)^2-2\lambda(a-a_0)[f(a)-f(a_0)]+\lambda^2[f(a)-f(a_0)]^2. \quad ④$$

由 ①、② 知 $(a-a_0)[f(a)-f(a_0)]\geqslant\lambda(a-a_0)^2\geqslant 0$， ⑤

$$[f(a)-f(a_0)]^2\leqslant(a-a_0)^2. \quad ⑥$$

将 ⑤、⑥ 代入 ④ 式，得

$$(b-a_0)^2\leqslant(a-a_0)^2-2\lambda\cdot\lambda(a-a_0)^2+\lambda^2(a-a_0)^2=(1-\lambda^2)(a-a_0)^2.$$

(3) 由 ③ 得

$$\begin{aligned}[f(b)]^2&=\{[f(b)-f(a)]+[f(a)-f(a_0)]\}^2\\&=[f(b)-f(a)]^2+2[f(b)-f(a)][f(a)-f(a_0)]+[f(a)-f(a_0)]^2\\&\leqslant(b-a)^2-2\frac{b-a}{\lambda}[f(b)-f(a)]+[f(a)]^2\\&\leqslant\lambda^2[f(a)]^2-\frac{2}{\lambda}\cdot\lambda(b-a)^2+[f(a)]^2\\&=\lambda^2[f(a)]^2-2[\lambda f(a)]^2+[f(a)]^2\end{aligned}$$

$= (1-\lambda^2)[f(a)]^2$,

所以$[f(b)]^2 \leqslant (1-\lambda^2)[f(a)]^2$.

说明 虽然此方法不是什么巧妙之法，从分析过程可以看出，只要对条件(1)，(2)，(3)利用得当，按照常规思路也可以顺利得到证法，为什么那么多的考生想不到呢？此 2004 年江苏高考压轴题，第三小问全省四十几万考生仅有一位考生做出来，可见难度之大.

例 9 (亚太地区数学奥林匹克试题) 设 f 是 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的函数，且

(1) 对于任意 $x,y\in\mathbf{R}$，$f(x)+f(y)+1\geqslant f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$；

(2) 对于任意 $x\in[0,1)$，有 $f(0)\geqslant f(x)$；

(3) $-f(-1)=f(1)=1$.

求出所有满足条件的函数 f.

解 从(1)和(2)可得 $2f(0)+1\geqslant 2f\left(\frac{1}{2}\right)+1\geqslant f(1)\geqslant f(1)+f(0)$，

但由(3)可知 $f(1)=1$，因此上式可化为 $2f(0)\geqslant 0\geqslant f(0)$.

从而有 $f(0)\geqslant 0\geqslant f(0)$，$f(0)=0$.

再由(2)，对于任意 $x\in(0,1)$，有 $f(x)\leqslant 0$.

若存在 $x\in(0,1)$ 使 $f(x)<0$，则 $f(1-x)\leqslant 0$，从而由(1)可得 $1>f(x)+f(1-x)+1\geqslant f(1)=1$，矛盾. 所以，对于任意 $x\in[0,1)$，都有 $f(x)=0$. ①

由(1)得，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+1)\geqslant f(x)+f(1)=f(x)+1$.

又由(1)和(3)可得，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有

$$f(x)\geqslant f(x+1)+f(-1)=f(x+1)-1.$$

由以上两式得，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+1)=f(x)+1$. ②

由①和②可得，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有

$f(x)=[x]$(高斯函数，表示不超过 x 的最大整数).

例 10 (第五届中国中学生数学冬令营试题) 设函数 $f(x)$ 对 $x\geqslant 0$ 有定义，且满足条件：

(1) 对任何 x、$y\geqslant 0$，$f(x)f(y)\leqslant y^2 f\left(\frac{x}{2}\right)+x^2 f\left(\frac{y}{2}\right)$，

(2) 存在常数 $M>0$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$|f(x)|\leqslant M$.

求证：$f(x)\leqslant x^2$.

证明 (取极限法) 在条件(1)中，令 $y=x$，得 $f^2(x)\leqslant 2x^2 f\left(\frac{x}{2}\right)$，令 $x=0$，$f^2(0)\leqslant 0$，$f(0)=0$，所以 $f(x)\geqslant \frac{1}{8x^2}f^2(2x)\geqslant 0(x>0)$.

当 $x>0$ 时，有 $\frac{f^2(x)}{x^4}\leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$，$\frac{f(x)}{x^2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}}$，

于是对任意正整数 n，有 $\frac{f(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{2^{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{n}{2^n}}} \cdot \left[\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\left(\frac{x}{2^n}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{n-1}{2^n}} \cdot x^{\frac{1}{2^{n-1}}}\left[f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]^{\frac{1}{2^n}}$

当 n 充分大时，$\frac{x}{2^n} \in [0,1]$，于是 $0 \leqslant f\left(\frac{x}{2^n}\right) \leqslant M$.

令 $n \to +\infty$，得到 $\frac{f(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{2}$，所以 $f(x) \leqslant x^2$.

例 11 （2005 年中国东南地区数学奥林匹克夏令营测试题）求函数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，满足：

① $x(f(x+1)-f(x)) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$ 以及

② $|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

解 取 $x=0$，由 ① 得 $f(0)=0$.

$x \neq 0, -1$ 时，① 可改写为 $\frac{f(x+1)}{x+1} = \frac{f(x)}{x}$.

特别地，对注意 $x>0$，及 $n \in \mathbf{N}^*$，有 $\frac{f(x+n)}{x+n} = \frac{f(x)}{x}$，

则 $|x-y| \geqslant |f(x+n)-f(y+n)| = \left|\frac{x+n}{x}f(x) - \frac{y+n}{y}f(y)\right|$

$$= \left|f(x)-f(y)+n\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{f(y)}{y}\right)\right|.$$

从而 $\frac{|x-y|}{n} \geqslant \left|\frac{f(x)-f(y)}{n} + \left(\frac{f(x)}{x}-\frac{f(y)}{y}\right)\right|$.

令 $n \to +\infty$，得 $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}, \forall x, y > 0$.

即 $f(x) = kx, x > 0$.

例 12 （第四届大学生国际数学奥林匹克试题）证明：不存在实数集到实数集的映射 f，使得对于所有的正实数 x、y，有

$$f(x+y) > f(x)(1+yf(x)) \tag{1}$$

成立.

证明 若满足题设的映射 f 存在，则对于任意的正实数 x、y，有

$$f(x+y)-f(x) > yf^2(x) \geqslant 0.$$

所以，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上是单调递增的，故 $f(x)$ 不能恒为 0，因此存在正实数 a，使得 $f(a) \neq 0$.
又对于任意的 $y>0$ 有 $f(a+y) > f(x)+yf^2(a)$. (2)

因为 $\lim\limits_{y\to+\infty}[f(x)+yf^2(a)] = +\infty$，由 (2) 知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$，这样可取实数 $a>0$，使得 $f(a)>0$，且对于任意的 $x \geqslant a$，有 $f(x) \geqslant f(a) > 0$.

对于任意实数 x，令 $y = \frac{1}{f(x)}$，由 (1) 得

$$f\left(x+\frac{1}{f(x)}\right)>2f(x). \tag{3}$$

令 $x_1=a$，$x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{f(x_n)}$，$n\in\mathbf{N}^*$，容易证明，数列$\{x_n\}$是单调递增数列，所以 $x_n\geqslant a$，$n\in\mathbf{N}^*$.

令 $u_n=f(x_n)$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $u_n>0$.

由(3)得 $u_{n+1}=f(x_{n+1})=f\left(x_n+\dfrac{1}{f(x_n)}\right)>2f(x_n)=2u_n$，

所以 $u_n\geqslant 2^n u_0$，从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$. (4)

另一方面，对于 $n\geqslant 0$，$x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{f(x_n)}=\dfrac{1}{u_n}\leqslant\dfrac{1}{2^n u_0}$，

求和得 $x_{n+1}\leqslant a+\dfrac{1}{u_0}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2^k}<a+\dfrac{1}{u_0}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^k}$，所以 $x_{n+1}<a+\dfrac{2}{u_0}$，

$$u_{n+1}=f(x_{n+1})<f\left(a+\frac{2}{u_0}\right). \tag{5}$$

(4)与(5)相矛盾.

例 13 已知函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，且同时满足：

(Ⅰ) 对任意 $x\in[0,1]$，总有 $f(x)\geqslant 3$；

(Ⅱ) $f(1)=4$；

(Ⅲ) 若 $x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，$x_1+x_2\leqslant 1$，则有 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)-3$.

(1) 试求 $f(0)$的值；

(2) 试求函数 $f(x)$ 的最大值；

(3) 试证明：当 $x\in\left(\dfrac{1}{3},1\right]$时，$f(x)<3x+3$；当 $x\in\left(\dfrac{1}{3^{n+1}},\dfrac{1}{3^n}\right]$($n\in\mathbf{N}^*$)时，$f(x)<3x+3$.

解 (1) 令 $x_1=x_2=0$，则有 $f(0)\geqslant 2f(0)-3$，即 $f(0)\leqslant 3$.

又对任意 $x\in[0,1]$，总有 $f(x)\geqslant 3$，所以 $f(0)=3$.

(2) 任取 x_1，$x_2\in[0,1]$，$x_1<x_2$，

$$f(x_2)=f[x_1+(x_2-x_1)]\geqslant f(x_1)+f(x_2-x_1)-3.$$

因为 $x_2-x_1>0$，所以 $f(x_2-x_1)\geqslant 3$，即 $f(x_2-x_1)-3\geqslant 0$，所以 $f(x_2)\geqslant f(x_1)$.

所以当 $x\in[0,1]$时，$f(x)\leqslant f(1)=4$，所以函数 $f(x)$的最大值是 4.

(3) 证明：当 $x\in\left(\dfrac{1}{3},1\right]$时，$f(x)\leqslant f(1)=4=1+3$.

而 $x\in\left(\dfrac{1}{3},1\right]$时，$3x>3\times\dfrac{1}{3}=1$，故 $f(x)<3x+3$.

由前述可知 $f(1)=f\left(\dfrac{1}{3^0}\right)=4=\dfrac{1}{3^0}+3$.

假设 $n=k$ 时，$f\left(\dfrac{1}{3^k}\right)\leqslant\dfrac{1}{3^k}+3$，由

$$f\left(\frac{1}{3^k}\right)=f\left[\frac{1}{3^{k+1}}+\left(\frac{1}{3^{k+1}}+\frac{1}{3^{k+1}}\right)\right]\geqslant f\left(\frac{1}{3^{k+1}}\right)+f\left(\frac{1}{3^{k+1}}+\frac{1}{3^{k+1}}\right)-3$$

$$\geqslant f\left(\frac{1}{3^{k+1}}\right)+f\left(\frac{1}{3^{k+1}}\right)+f\left(\frac{1}{3^{k+1}}\right)-6$$

得 $3f\left(\frac{1}{3^{k+1}}\right)\leqslant f\left(\frac{1}{3^k}\right)+6\leqslant\frac{1}{3^k}+9$，即 $f\left(\frac{1}{3^{k+1}}\right)\leqslant\frac{1}{3^{k+1}}+3$.

由此可知对任意自然数 n，均有 $f\left(\frac{1}{3^n}\right)\leqslant\frac{1}{3^n}+3$.

对任意的 $x\in\left(\frac{1}{3^{n+1}},\frac{1}{3^n}\right]$，均有 $3x>3\times\frac{1}{3^{n+1}}=\frac{1}{3^n}$，

所以当 $x\in\left(\frac{1}{3^{n+1}},\frac{1}{3^n}\right]$时，$f(x)\leqslant f\left(\frac{1}{3^n}\right)\leqslant\frac{1}{3^n}+3<3x+3$.

说明 本题是一道涉及函数单调性(本题中的函数为非严格单调)、数学归纳法等内容的综合题，对思维能力要求较高.

例 14 (第四届中国中学生数学奥林匹克冬令营试题) f 是定义在$(1,+\infty)$上且在$(1,+\infty)$中取值的函数，满足条件：对任意 x，$y>1$ 及 u，$v>0$，都成立

$$f(x^u y^v)\leqslant f^{\frac{1}{4u}}(x)f^{\frac{1}{4v}}(y),\qquad(1)$$

试确定所有这样的函数 f.

解 先将(1)式化为一元函数. 令 $x=y$，$u=v=\frac{t}{2}$，则得：对所有 $x>1$，$t>0$，都有 $f(x^t)\leqslant f^{\frac{1}{t}}(x)$.

$x^{\frac{1}{t}}\to x$，得 $f(x)\leqslant f^{\frac{1}{t}}(x^{\frac{1}{t}})$，再令 $\frac{1}{t}\to t$，得 $f(x^t)\geqslant f^{\frac{1}{t}}(x)$，所以对所有 $x>1$，$t>0$，都有 $f(x^t)=f^{\frac{1}{t}}(x)$.

取 $x=\mathrm{e}$，$u=\mathrm{e}^t$，得到 $f(u)=f^{\frac{1}{\ln u}}(\mathrm{e})$.

令 $a=f(\mathrm{e})>1$，$x\to u$，得 $f(x)=a^{\frac{1}{\ln x}}$，$a>1$.

下面验证这样的函数确实满足要求.

对任意 x，$y>1$ 及 u，$v>0$，我们有

$f(x^u y^v)=a^{\frac{1}{\ln x^u y^v}}=a^{\frac{1}{u\ln x+v\ln y}}$，$f^{\frac{1}{4u}}(x)f^{\frac{1}{4v}}(y)=a^{\frac{1}{4u\ln x}+\frac{1}{4v\ln y}}$，只需证

$$\frac{1}{u\ln x+v\ln y}\leqslant\frac{1}{4u\ln x}+\frac{1}{4v\ln y}\Leftrightarrow(u\ln x)^2+2uv\ln x\ln y+(v\ln y)^2\geqslant 4uv\ln x\ln y$$

即 $(u\ln x-v\ln y)^2\geqslant 0$，当然成立.

所以 $f(x^u y^v)=a^{\frac{1}{\ln x^u y^v}}=a^{\frac{1}{u\ln x+v\ln y}}\leqslant a^{\frac{1}{4u\ln x}+\frac{1}{4v\ln y}}=f^{\frac{1}{4u}}(x)f^{\frac{1}{4v}}(y)$.

说明 当所给的函数不等式含有较多的变量时，常常先将它化为一个变量的函数不等

式，再利用不等式的证明技巧来处理这类问题.

例 15 (2006 年女子数学奥林匹克试题改编)设 $a>0$，连续函数 $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbf{R}$，满足 $f(a)=1$. 如果对任意 $x、y\in\mathbf{R}^+$，都有 $f(x)f(y)+f(\frac{a}{x})f(\frac{a}{y})\leqslant 2f(xy)$. ①

求证：$f(x)f(y)\leqslant f(xy)$.

证明 在式①中取 $x=y=\sqrt{t}$，得 $f^2(\sqrt{t})+f^2\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\leqslant 2f(t)$.

所以，$f(t)\geqslant 0$.

在式①中令 $x=y=1$，得 $f^2(1)+f^2(a)\leqslant 2f(1)$，$(f(1)-1)^2\leqslant 0$.

则 $f(1)=1$.

在式①中令 $y=1$，得 $f(x)f(1)+f\left(\frac{a}{x}\right)f(a)\leqslant 2f(x)$，

$f(x)\geqslant f\left(\frac{a}{x}\right)(x>0)$. ②

在②中取 $y=\frac{a}{x}$，则 $y\in\mathbf{R}^+$，得 $f\left(\frac{a}{y}\right)\geqslant f(y)$，

即 $f\left(\frac{a}{x}\right)\geqslant f(x)$. ③

由②、③得 $f\left(\frac{a}{x}\right)=f(x)$. ④

在式①中取 $y=\frac{a}{x}$，得 $f(x)f\left(\frac{a}{x}\right)+f\left(\frac{a}{x}\right)f(x)\leqslant 2f(a)$，

$$f(x)f\left(\frac{a}{x}\right)\leqslant 1. \quad ⑤$$

由式④、⑤得 $f^2(x)\leqslant 1\ (x>0)$.

即 $0\leqslant f(x)\leqslant 1\ (x>0)$.

由④，式①可化为 $f(x)f(y)\leqslant f(xy)$.

例 16 (中国国家队选拔赛试题)设 $\mathbf{N}$ 是自然数集，$\mathbf{R}$ 是实数集，S 是满足以下两个条件的函数 $f:\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{R}$ 的集合：

(1) $f(1)=2$；

(2) $f(n+1)\geqslant f(n)\geqslant\frac{n}{n+1}f(2n)$，$n=1,2,\cdots$

试求最小的自然数 M，使得对任何 $f\in S$ 及任何 $n\in\mathbf{N}$，都有 $f(n)<M$.

解 首先估计 $|f(n)|$ 的上界.

鉴于 f 的单调性，只需考察 $|f(2^k)|$ 的上界. 由已知条件(1)和(2)得

$$f(2^{k-1}) \leqslant \left(1+\frac{1}{2^k}\right)f(2^k) \leqslant \left(1+\frac{1}{2^k}\right)\left(1+\frac{1}{2^{k-1}}\right)f(2^{k-1})$$

$$\cdots$$

$$\leqslant 2\lambda_k$$

其中 $\lambda_k = \left(1+\frac{1}{2^k}\right)\left(1+\frac{1}{2^{k-1}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)(1+1)$.

通过对前几个 λ_k 的计算，我们猜测 $\lambda_k < 5$，$k = 1, 2, \cdots$

为了证明这一猜测，我们来证明一个加强命题：$\lambda_k \leqslant 5\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$，$k = 2, 3, \cdots$

事实上，$k = 2$ 时，加强命题显然成立，因为

$$\lambda_2 = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) = 5\left(1-\frac{1}{2^2}\right).$$

假设已证得 $\lambda_n \leqslant 5\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$，则

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n \cdot \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \leqslant 5\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$= 5\left(1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{2n+1}}\right) = 5\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{2n+1}}\right) < 5\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

至此，我们已证明，对任何 $k \in \mathbf{N}$，必有 $\lambda_k < 5$.

对任何 $f \in S$ 和任何 $n \in \mathbf{N}$，存在自然数 k，使 $n < 2^{k+1}$，因而

$$f(n) \leqslant f(2^{k+1}) \leqslant 2\lambda_k < 10.$$

为了证明题目所求的最小自然数 $M = 10$，还需构造一个适合题目条件的函数 f_0，该函数在某处的值大于 9.

注意到 $2\lambda_5 > 9$，我们定义一个函数 f_0：$\mathbf{N}^+ \to \mathbf{R}$ 如下

$$\begin{cases} f_0(1) = 2, \\ f_0(n) = 2\lambda_k, \end{cases}$$

其中 $2^k < n \leqslant 2^{k+1}$，$k = 0, 1, 2, \cdots$，$\lambda_0 = 2$.

对任何自然数 n，显然有 $f_0(n+1) \geqslant f_0(n)$.

尚需验证 $f_0(n) \geqslant \frac{n}{n+1} f_0(2n)$.

设 $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$，且 $2^k < n \leqslant 2^{k+1}$，则 $2^{k+1} < 2n \leqslant 2^{k+2}$.

于是，$f_0(2n) = 2\lambda_{k+1} = \left(1+\frac{1}{2^{k+1}}\right) \cdot 2\lambda_k \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right) f_0(n)$.

思考交流

思考题1 设正值函数 $f(x)$ 定义在 $D(\subseteq \mathbf{R}^+)$ 上，且对任意 x_1、$x_2 \in D$，恒有

$$f(\sqrt{x_1 x_2}) \leqslant \sqrt{f(x_1) f(x_2)}, \quad ①$$

$$f^2(x_1) + f^2(x_2) \geqslant 2f^2\left(\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}\right). \quad ②$$

求证：$f(x_1) + f(x_2) \geqslant 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

证明 利用已知的两个不等式

$$\begin{aligned}[f(x_1) + f(x_2)]^2 &= f^2(x_1) + f^2(x_2) + 2f(x_1)f(x_2) \\ &\geqslant 2f^2\left(\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}\right) + 2f^2(\sqrt{x_1 x_2}) \\ &= 2\left[f^2\left(\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}\right) + f^2(\sqrt{x_1 x_2})\right] \\ &\geqslant 4f^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}\right)^2 + (\sqrt{x_1 x_2})^2\right]}\right) \\ &= 4f^2\left(\sqrt{\frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2}\right) = 4f^2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),\end{aligned}$$

所以 $f(x_1) + f(x_2) \geqslant 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

说明 仅满足①的函数通常称为 D 上的几何凸函数，仅满足②的函数通常称为 D 上的平方凸函数.

思考题2 （第八届中国中学生数学冬令营试题）设函数 $f:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 满足以下条件：对于任意正实数 x、y，有 $f(xy) \leqslant f(x)f(y)$，试证：对任意的正实数 x 及正整数 n，均有 $f(x^n) \leqslant f(x) f^{\frac{1}{2}}(x^2) f^{\frac{1}{3}}(x^3) \cdots f^{\frac{1}{n}}(x^n)$.

证明 令 $F_n(x) = \prod_{k=1}^{n} f^{\frac{1}{k}}(x^k)$，$n = 1, 2, \cdots$. 于是

$F_1(x) = f(x)$，$F_i(x) = f^{\frac{1}{i}}(x^i) F_{i-1}(x)$，$i = 2, 3, \cdots$，

所以对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$，有

$[F_n(x)]^n = f(x^n)[F_{n-1}(x)]^n$，$[F_{n-1}(x)]^{n-1} = f(x^{n-1})[F_{n-2}(x)]^{n-1}$，$\cdots$

$[F_2(x)]^2 = f(x^2)[F_1(x)]^2$，$[F_1(x)]^1 = f(x)$，

连乘上述各式，得

$[F_n(x)]^n = f(x^n) f(x^{n-1}) \cdots f(x^2) f(x) F_{n-1}(x) F_{n-2}(x) \cdots F_2(x) F_1(x)$.

下面用归纳法证明所求不等式.

当 $n=1$ 时, $F_1(x)=f(x)=f(x^1)$, 不等式成立;

假设 $n=k$ 时, $F_k(x)\geqslant f(x^k)$, 对 $n=1,2,\cdots,n-1$ 成立, 于是

$$[F_n(x)]^n\geqslant f(x^n)f(x^{n-1})\cdots f(x^2)f(x)f(x^{n-1})\cdots f(x^2)f(x)$$

$$=f(x^n)[f(x^{n-1})f(x)]\cdots[f(x^2)f(x^{n-2})][f(x)f(x^{n-1})]$$

由条件知, $f(x^{n-r})f(x^r)\geqslant f(x^{n-r}\cdot x^r)=f(x^n)$,

于是 $[F_n(x)]^n\geqslant[f(x^n)]^n$, 即有 $F_n(x)\geqslant f(x^n)$.

同步检测 8

1. 设 $f(x)=\begin{cases}0, x\text{ 为有理数}\\1, x\text{ 为无理数}\end{cases}$, 对所有的实数 x 均满足 $xf(x)\leqslant g(x)$ 的函数 $g(x)$ 是 ( )

A. $g(x)=\cos x$　　B. $g(x)=x$　　C. $g(x)=x^2$　　D. $g(x)=|x|$

2. (2006 年全国高中数学联赛江苏省初赛试题) 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上单调递减的奇函数. 若 $x_1+x_2>0$, $x_2+x_3>0$, $x_3+x_1>0$, 则 ( )

A. $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)>0$　　B. $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)<0$

C. $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)=0$　　D. $f(x_1)+f(x_2)>f(x_3)$

3. (2002 年北京市高考题) 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-3,3)$ 上的奇函数, 当 $0<x<3$ 时 $f(x)$ 的图象如图 8-1 所示, 那么不等式 $f(x)\cos x<0$ 的解集是 ( )

A. $\left(-3,-\frac{\pi}{2}\right)\cup(0,1)\cup\left(\frac{\pi}{2},3\right)$

B. $\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)\cup(0,1)\cup\left(\frac{\pi}{2},3\right)$

C. $(-3,-1)\cup(0,1)\cup(1,3)$

D. $\left(-3,-\frac{\pi}{2}\right)\cup(0,1)\cup(1,3)$

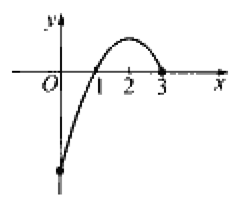


图 8-1

4. 设 f: $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, 且对所有正整数 n, 有 $f(n+1)>f(n)$, $f(f(n))=3n$. $f(1997)$ 的值为 ( )

A. 1997　　B. 1268　　C. 3804　　D. 5991

5. (第一届高二"希望杯"第 2 试) f 是 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 上的一一映射, 函数 $y=f(x)$ 严格递增, 不等式 $x>f(x)$ 的解集为 P, 不等式 $x>f[f(x)]$ 的解集为 Q, 则 ( )

A. $P\subsetneqq Q$　　B. $P=Q$　　C. $Q\subsetneqq P$　　D. $P\subsetneqq Q$ 且 $Q\subsetneqq P$

6. (2006 年全国高中数学联赛河南高一试题) 设函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R}, x\neq0)$ 对任意的非零

实数 x_1、x_2，有 $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，则不等式 $f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)\leqslant 0$ 的解为________。

7. 设 $f(x)$、$g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数和偶函数，当 $x<0$ 时，$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$，且 $g(3)=0$，则不等式 $f(x)\cdot g(x)<0$ 的解集是________。

8. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数且连续，当 $x>0$ 时，有 $f'(x)<0$，则不等式 $f(\lg x)>f(1)$ 的解集为________。

9. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的减函数，且对于 $x\in\mathbf{R}$，$f(a^2-\sin x)\leqslant f(a+1+\cos^2 x)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是________。

10. 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(-1)=0$，且 $x\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}(x^2+1)$ 对一切实数 x 恒成立，那么，函数 $f(x)$ 的解析式为________。

11. （第16届爱尔兰数学奥林匹克试题）证明：不存在定义在正实数上的函数 f，使得对任意 $y>x>0$，均有 $f(y)>(y-x)f^2(x)$。

12. 设 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$，$f$ 是 A 到实数集 $\mathbf{R}$ 的映射，满足：

(1) $f(1)=1$；

(2) $f(x)\geqslant 0$，$x\in A$。

(3) 如果 x，y，$x+y\in A$，则 $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$。

求证：对任意的 $x\in A$，有 $f(x)\leqslant 2x$。

13. （第11届"希望杯"高一第2试）函数 $y=f(x)$ 中的 x 与 $f(x)$ 都是正整数，并且对于任意的正整数 x，都有 $f(x)+f(x+2)\leqslant 2f(x+1)$，$f(x)<2000$。

求证：存在正整数 m，使得 $x\geqslant m$ 时，$f(x)$ 是常数。

14. （2006届清华大学自主招生数学试题）已知 $f(x)$ 满足：对实数 a、b 有 $f(a\cdot b)=af(b)+bf(a)$，且 $|f(x)|\leqslant 1$，求证 $f(x)$ 恒为零。（可用以下结论：若 $\lim g(x)=0$，$|f(x)|\leqslant M$，M 为一常数，那么 $\lim(f(x)\cdot g(x))=0$。

15. （第26届俄罗斯数学奥林匹克11年级试题）找出所有的函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，它们对一切 x、y、$z\in\mathbf{R}$ 满足不等式 $f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)\geqslant 3f(x+2y+3z)$。

16. （1997年IMO试题）设 $f(n)$ 定义在正整数集上且函数值也在正整数集上，证明：若对于 $x\in\mathbf{N}^*$、$f(n+1)>f[f(n)]$，则 $f(n)=n$。

17. 设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数，对任意 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$（其中 $M\in\mathbf{R}^+$），则称 $f(x)$ 为定义域 D 上的有界函数。

证明：$(n-1)M^n+\prod_{i=1}^{n}f(x_i)\geqslant M^{n-1}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$，其中 $x_i\in D(i=1,2,\cdots,n)$，等号当且仅当 $f(x_i)=M(i=1,2,\cdots,n)$ 时成立。

18. 设 $f(x)$ 是满足下列条件的函数：

(1) 若 $x>y$ 且 $f(x)+x\geqslant w\geqslant f(y)+y$，则存在实数 $z\in[y,x]$，使得 $f(z)=w-z$；

(2) 方程 $f(x)=0$ 至少有一个解，并在该方程的解中存在一个解不大于所有其他的解；

(3) $f(0)=1$；

(4) $f(-2007)\leqslant 2008$；

(5) $f(x)f(y)=f(xf(y)+yf(x)+xy)$.

试求：$f(-2007)$ 的值.

19. (第 12 届韩国数学奥林匹克试题) 设函数 $f(x)$ 对所有的有理数 m、n 都有 $|f(m+n)-f(m)|\leqslant\frac{m}{n}$. 证明：对所有正整数 k，有 $\sum\limits_{i=1}^{k}|f(2^k)-f(2^i)|\leqslant\frac{k(k-1)}{2}$.

20. (第 22 届美国数学奥林匹克) 设函数 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$，满足

(1) $f(x)\geqslant 0$，$\forall x\in[0,1]$；

(2) $f(1)=1$；

(3) $f(x)+f(y)\leqslant f(x+y)$，$x,y,x+y\in[0,1]$.

求出最小的常数 c，使 $f(x)\leqslant cx$ 对一切满足上述条件的函数 f 及一切 $x\in[0,1]$ 都成立，并证明你的结论.

21. (第 11 届俄罗斯数学奥林匹克) 考虑函数 $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Z}$. 证明存在两个有理数 a 和 b 使得 $\frac{f(a)+f(b)}{2}\leqslant\frac{f(a+b)}{2}$.

22. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上有定义，满足 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上严格递减，且

$$f(x)>\frac{1}{x^2}, \qquad ①$$

在 $\mathbf{R}^+$ 上恒有 $f^2(x)f\left(f(x)-\frac{1}{x^2}\right)=f^3(1)$. ②

(1) 求函数值 $f(1)$；

(2) 给出一个满足条件的函数.

23. (2005 年 IMO 中国国家集训选拔试题) 设 a 是给定的正实数，求所有的函数 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{R}$，使得对任意满足条件 $am\leqslant k<(a+1)m$ 的正整数 k、m，都有 $f(k+m)=f(k)+f(m)$.

第9讲 不等式的综合应用

知识点金

不等式知识贯穿于高中数学的各个部分，具有应用广泛、变换灵活的特点，体现出不等式在数学中所占的工具性地位．主要体现在：近几年的高考和数学竞赛试题中，运用不等式的性质、定理和方法，研究函数性态（函数定义域、值域的确定，函数单调性的研究等），一元二次方程根的分布，方程（组）解的讨论，函数最值，解析几何中直线和圆锥曲线位置关系的研究，实际应用等方面的问题，都与不等式有密切的联系，并且涉及的深度和广度在不断加强．

不等式的应用大致可分为两类：一类是建立不等式求参数的取值范围或解决一些实际应用问题；另一类是建立函数关系，利用基本不等式（均值不等式，柯西不等式，排序不等式等）求最值问题．

解不等式应用问题的几个主要步骤：

1．审题．必要时画出示意图．

2．建模．建立不等式模型，即根据题意找出常量与变量的不等关系；注意文字语言、图形语言、符号语言的转换．

3．求解．利用不等式的有关知识解题．

例题精析

例1 函数 $f(x)=\sqrt{x^2+3x+3}+\sqrt{x^2-3x+3}$ 的最小值是________，其中，$x\in\mathbf{R}$．

解 将函数式作如下变形

$$f(x)=\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left[0-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2},$$

等式右边可看作：动点 $P(x, 0)$到两个定点 $A\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$的距离之和.

由于 A、B 分别在 x 轴两边，所以 $f(x)=|PA|+|PB|\geqslant|AB|=2\sqrt{3}$，等号一定能取到，所以函数 $f(x)$的最小值是 $2\sqrt{3}$.

说明 本题初看是代数题，而其实质是几何题. 经简单变形，其几何意义就十分明显了：表示动点 $P(x, 0)$到两个定点 A，B 的距离之和. 针对题目的这一特点，换一个角度思考，构造出距离模型，在这个模型上，问题就变得直观了.

根据距离模型几何意义的多样性，取点时有一定的灵活性：一般求距离和的最值，两点取在 x 轴两边；求距离差的最值，两点取在 x 轴同侧，这样会使问题易于解决.

例 2 如图 9-1 所示，若三棱锥 $P—ABC$ 中棱 $AP=x$，其余各棱长均为 1，设三棱锥 $P—ABC$ 的体积为 $V(x)$，求：

(1) $V(x)$的表达式，并求出它的定义域；

(2) 当 x 为何值时，$V(x)$取得最大值？最大值多少？

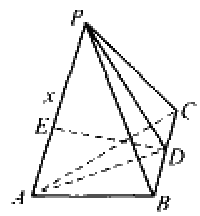


图 9-1

分析 第(2)问是在第(1)问的基础上，因此关键是求 $V(x)$的表达式. 在几何中涉及有公共底边的等腰三角形，一般取公共底边的中点，过顶点与中点作出辅助线.

解 (1) 取 BC 中点为 D，连 AD、PD，则 $AD\perp BC$，$PD\perp BC$，所以 $BC\perp$ 平面 PAD，且 $PD=AD=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，取 PA 中点为 E，连 DE，则 $DE\perp PA$，且 $DE=\sqrt{PD^2-PE^2}=\sqrt{\frac{3}{4}-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3-x^2}$，所以 $S_{\triangle PAD}=\frac{1}{2}\cdot PA\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{3-x^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}x\sqrt{3-x^2}(0<x<\sqrt{3})$.

$$\text{而 } V(x)=V_{C-PAD}+V_{B-PAD}=2V_{C-PAD}=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{4}\sqrt{3-x^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{x}{12}\sqrt{3-x^2}(0<x<\sqrt{3}).$$

(2) $V(x)=\frac{1}{12}x\sqrt{3-x^2}=\frac{1}{12}\sqrt{x^2(3-x^2)}=\frac{1}{12}\sqrt{-(x^2-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}}$，当 $x^2=\frac{3}{2}$ 即 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}\in(0, \sqrt{3})$ 时，$V(x)\max=\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{8}$.

亦可对 $x^2(3-x^2)\leqslant\left[\frac{x^2+(3-x^2)}{2}\right]^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$，当且仅当 $x^2=3-x^2$，即 $x^2=\frac{3}{2}$ 时取等号，求得 $V(x)$ 的最大值.

说明 本题是函数、立体几何、不等式应用的综合题，关键是求 $V(x)$的表达式，这里运用了“割补术”. 在几何中，割补法是求体积的一种常用技巧.

例 3 上下放着两个同心圆盘，每个圆盘都被划分为 n 个全等的扇形．上面一个圆盘的每个扇形内分别填上实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$．下面一个圆盘各个扇形分别填上实数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，且满足：$a_1+a_2+\cdots+a_n>0$，$b_1+b_2+\cdots+b_n>0$．求证，可以旋转扇形到适当的位置，使得上下重合的两个扇形所填的数的积的和为正．

证明 令 $S_1 = a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

$S_2 = a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_nb_1$

$\cdots$

$S_n = a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_nb_{n-1}$

则 $S=S_1+S_2+\cdots+S_n=a_1\sum_{i=1}^{n}b_i+a_2\sum_{i=1}^{n}b_i+\cdots+a_n\sum_{i=1}^{n}b_i=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}b_i>0$，所以至少有一个 $S_i>0$，命题得证．

说明 当问题研究的是某种个体的性质时，我们可以将个体放入某个整体中，从整体上把握事物的性质，由此导出个体的性质．

例 4 （2004 年 IMO 中国国家集训队选拔考试题）设 a、b、c 是周长不超过 2π 的三角形的三条边长．证明：$\sin a$、$\sin b$、$\sin c$ 可构成三角形的三条边长．

证明 （1）由题设可知 $0<a,b,c<\pi$，故 $\sin a$、$\sin b$、$\sin c$ 均大于 0．

（2）若 $0<a+b\leqslant\pi$，由题设知 $a+b>c$，即 $\frac{a+b}{2}>\frac{c}{2}$．

又因 $0<\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以，$0<\frac{c}{2}<\frac{\pi}{2}$．

故 $\sin\frac{a+b}{2}>\sin\frac{c}{2}>0$．

若 $\pi<a+b<2\pi$，则 $0<\pi-\frac{a+b}{2}<\frac{\pi}{2}$．又由 $a+b+c\leqslant2\pi$，知 $\pi-\frac{a+b}{2}\geqslant\frac{c}{2}$，且 $0<\frac{c}{2}<\frac{\pi}{2}$．所以，$\sin\frac{a+b}{2}=\sin\left(\pi-\frac{a+b}{2}\right)>\sin\frac{c}{2}>0$．

（3）由题设可知 $|a-b|<c$，则 $\frac{|a-b|}{2}<\frac{c}{2}$．

又由 $0<a$、b、$c<\pi$，知 $0\leqslant\frac{|a-b|}{2}<\frac{\pi}{2}$，$0<\frac{c}{2}<\frac{\pi}{2}$．

故 $\cos\frac{|a-b|}{2}>\cos\frac{c}{2}>0$，即 $\cos\frac{a-b}{2}>\cos\frac{c}{2}>0$．

综上所述，有

$\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}>\sin\frac{c}{2}\cdot\cos\frac{c}{2}$，即 $\sin a+\sin b>\sin c$．

同理，$\sin b+\sin c>\sin a$，$\sin c+\sin a>\sin b$．

所以，$\sin a$、$\sin b$、$\sin c$ 可构成三角形的三条边长．

例 5 设 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的函数，且其图象上任意两点连线的斜率均小于零.

(Ⅰ) 判断函数 $f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ) 如果函数 $f(x-c)$ 和 $f(x-c^2)$ 的定义域的交集为空集，求实数 c 的取值范围；

(Ⅲ) 当 $-1\leqslant c\leqslant 2$ 时，求函数 $f(x-c)+f(x-c^2)$ 的定义域.

解 (Ⅰ) 因为函数 $f(x)$ 的图象上任意两点连线的斜率均为负，所以对于任意 x_1、$x_2\in[-1,1]$ 且 $x_1\neq x_2$，设 $A(x_1, f(x_1))$，$B(x_2, f(x_2))$，则有

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$$

这说明 x_1-x_2 与 $f(x_1)-f(x_2)$ 异号，所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是减函数.

(Ⅱ) $f(x-c)$ 的定义域为 $[c-1, c+1]$，$f(x-c^2)$ 的定义域为 $[c^2-1, c^2+1]$，而这两个定义域的交集为空集，则有 $c^2-1>c+1$ 或 $c^2+1<c-1$，解得 $c>2$ 或 $c<-1$.

故 c 的取值范围为 $c>2$ 或 $c<-1$.

(Ⅲ) 因为 $c^2+1>c-1$ 恒成立，所以由(2)知：当 $-1\leqslant c\leqslant 2$ 时，$c^2-1\leqslant c+1$.

当 $1\leqslant c\leqslant 2$ 或 $-1\leqslant c\leqslant 0$ 时，$c^2+1\geqslant c+1$ 且 $c^2-1\geqslant c-1$，此时的交集为 $[c^2-1, c+1]$；

当 $0<c<1$，$c^2+1<c+1$ 且 $c^2-1<c-1$，此时的交集为 $[c-1, c^2+1]$.

综合上述，可知，当 $-1\leqslant c\leqslant 2$ 时，函数 $f(x)$ 存在公共定义域，且

当 $-1\leqslant c\leqslant 0$ 或 $1\leqslant c\leqslant 2$ 时，公共定义域为 $[c^2-1, c+1]$；

当 $0<c<1$ 时，公共定义域为 $[c-1, c^2+1]$.

例 6 设 $f(x)=\lg\left[\dfrac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a}{n}\right]$，其中 a 是实数，n 是任意给定的自然数且 $n\geqslant 2$.

(1) 如果 $f(x)$ 在 $x\in(-\infty,1]$ 时有意义，求 a 的取值范围；

(2) 当 $a\in(0,1]$ 且 $x\neq 0$ 时，求证：$2f(x)<f(2x)$.

解 (1) 因 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2$，$x\in(-\infty,1]$，当 $f(x)$ 有意义时，需要 $\dfrac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a}{n}>0$，即需 $a>-\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^x+\left(\dfrac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^x\right]$.

由于 $-\left(\dfrac{k}{n}\right)^x$ 在 $(-\infty,1]$ 上是单调增函数，$(k=1,2,\cdots,n-1)$，所以 $-\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^x+\left(\dfrac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^x\right]$ 在 $(-\infty,1]$ 上也是单调增函数，故当 $x=1$ 时取得最大值 $-\dfrac{1+2+\cdots+(n-1)}{n}=\dfrac{1-n}{2}$，故只需 $a>\dfrac{1-n}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $x\in(-\infty,1]$ 时有意义，即 $a\in\left(\dfrac{1-n}{2},+\infty\right)$.

(2) 当 $a\in(0,1]$ 且 $x\neq 0$ 时，欲证 $2f(x)<f(2x)$ 只需证明 $n\geqslant 2$ 时，

$$2\lg\left[\frac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a}{n}\right]<\lg\left[\frac{1+2^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+n^{2x}a}{n}\right],$$即

$[1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a]^2<n[1+2^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+n^{2x}a]$.

当 $n\geqslant 2$，$a\in(0,1)$ 且 $x\neq 0$ 时成立.

由柯西不等式可知：$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\leqslant n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$，其中等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

(i) 当 $a\in(0,1]$ 且 $x\neq 0$ 时，因 $2^x\neq 1$，

$$[1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a]^2<n[1+2^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+n^{2x}a^2].$$

(ii) 当 $a\in(0,1]$ 且 $x\neq 0$ 时，因 $a^2<a$，故

$$[1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a]^2<n[1+2^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+n^{2x}a].$$

所以 $2f(x)<f(2x)$.

例 7 如图 9-2 的电路图中，总电压 U 保持不变，滑动变阻器的总电阻为 $2R$，开始滑片 P 位于变阻器的中点，电流表 A（内阻不计）的示数为 I_0. 当滑片向右移动到最右端点 N 的过程中，试求出电流表 A 内示数的最小值（用 I_0 表示）.

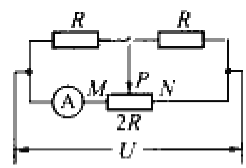


图 9-2

分析 这是一道电学方面的问题，物理学中常用定性分析的方法，较"粗糙"地得出问题的结论，但往往较难使人信服. 而这里利用定量的方法，通过科学计算，得到准确无误的结论.

设 R_N 表示滑动变阻器右端的电阻值，移动过程中 x 表示 R_N 的减少量，先建立关于 x 的目标函数，然后利用数学中的有关知识求最值.

解 设滑动变阻器的左、右两端的电阻值分别为 R_M、R_N，点 P 在右移过程中，R_N 的减少量为 x，于是 $0\leqslant x\leqslant R$，且 $R_M=R+x$，$R_N=R-x$. 故

$$R_{总}=\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R_M}}+\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R_N}}=\frac{R(4R^2-2x^2)}{4R^2-x^2},$$

$$I_{总}=\frac{U}{R_{总}}=\frac{U(4R^2-x^2)}{R(4R^2-2x^2)}.$$

于是，电流表 A 中的示数为

$$I=\frac{I_{总}R}{R_M+R}=\frac{U}{2}\cdot\frac{2R-x}{2R^2-x^2}(0\leqslant x\leqslant R),$$

由于当 $x=0$ 时，$I=I_0$，即 $I_0=\frac{U}{2}\cdot\frac{2R-0}{2R^2-0}=\frac{U}{2R}$，故 $U=2I_0R$.

令 $y=f(x)=\frac{2R-x}{2R^2-x^2}(0\leqslant x\leqslant R)$，下面求 $f(x)$ 的最小值.

设 $t = 2R - x$，则 $x = 2R - t$，$t \in [R, 2R]$.

$$y = \frac{t}{2R^2 - (2R-t)^2} = \frac{t}{4Rt - t^2 - 2R^2} = \frac{1}{4R - \left(t + \dfrac{2R^2}{t}\right)}$$

$$\geqslant \frac{1}{4R - 2\sqrt{t \cdot \dfrac{2R^2}{t}}} = \frac{2+\sqrt{2}}{4R},$$

当且仅当 $t = \dfrac{2R^2}{t}$，即 $t = \sqrt{2}R \in [R, 2R]$ 时，上述“$\geqslant$”中取“$=$”，于是 $y_{\min} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4R}$.

下面求 $I_{\min}$.

$$I_{\min} = \left(\frac{U}{2} \cdot \frac{2R - x}{2R^2 - x^2}\right)_{\min} = \frac{U}{2} \cdot y_{\min} = \frac{U}{2} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{4R} = \frac{2I_0R(2+\sqrt{2})}{8R} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}I_0.$$

说明 解题关键点是认真读题、审题，建立数学模型，转化成数学问题，用数学方法求最值.

例 8 若(x, y)满足 $x^2 + xy + y^2 \leqslant 1$，求 $x - y + 2xy$ 的最值.

解法 1 令 $m = x - y$，$n = xy$，条件化为 $m^2 + 3n \leqslant 1$，目标函数 $S = x - y + 2xy = m + 2n$，将 $y = x - m$ 代入 $n = xy$ 中得 $x^2 - mx - n = 0$，$\Delta = m^2 + 4n \geqslant 0$.

所以换元后的约束条件为

$$\begin{cases} m^2 + 3n \leqslant 1, \\ m^2 + 4n \geqslant 0. \end{cases}$$

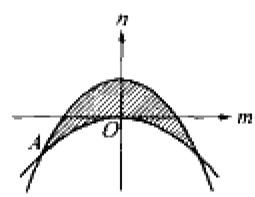


图 9-3

故点(m, n)的集合是抛物线 $m^2 = -3n + 1$ 和 $m^2 = -4n$ 之间的区域 O，要求 $S = m + 2n$ 的最值就是求直线系 $n = -\dfrac{1}{2}m + \dfrac{S}{2}$ 的截距的最值. 所以当直线与抛物线 $m^2 + 3n = 1$ 相切时，S 最大，由 $\begin{cases} S = m + 2n \\ m^2 + 3n = 1 \end{cases} \Rightarrow 2m^2 - 3m + (3S - 2) = 0$，$\Delta = 0$，得 $S_{\max} = \dfrac{25}{24}$.

当直线过两抛物线在第三象限的交点 A 时，S 最小，求得 $A(-2, -1)$，所以 $S_{\min} = -4$.

说明 通过换元，利用数形结合的方法使计算简化.

解法 2 $x^2 + xy + y^2 \leqslant 1$ 左边配方，得 $\left(x + \dfrac{1}{2}y\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 \leqslant 1$.

令 $x + \dfrac{1}{2}y = r\cos\theta$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}y = r\sin\theta$，$0 \leqslant r \leqslant 1$，则

$$x = r\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{3}r\sin\theta,\ y = \frac{2\sqrt{3}}{3}r\sin\theta,$$

于是 $x-y+2xy=(r\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}r\sin\theta)-\frac{2\sqrt{3}}{3}r\sin\theta+2(r\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}r\sin\theta)\frac{2\sqrt{3}}{3}r\sin\theta$

$$=r\left[(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)+\frac{2}{3}r(\sqrt{3}\sin2\theta-2\sin^2\theta)\right] \quad (1)$$

设 $t=\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$，则 $t\in[-2,2]$，且

$t^2=\cos^2\theta-2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta-3\sin^2\theta$，

得　　$2\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin2\theta=t^2-1$，代入(1)式得

$$x-y+2xy=r\left[t+\frac{2}{3}r(1-t^2)\right]=-\frac{2}{3}r^2(t-\frac{3}{4r})^2+\frac{2}{3}r^2+\frac{3}{8}\leqslant\frac{2}{3}+\frac{3}{8}=\frac{25}{24}.$$

等号当且仅当 $t-\frac{3}{4r}=0$，$r=1$，即 $t=\frac{3}{4}$，$r=1$ 时成立，所以 $x-y+2xy$ 的最大值为 $\frac{25}{24}$.

例9　设 $k\geqslant2$ 是一个固定的正整数，k 个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 使 $n=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2}{a_1a_2\cdots a_k}$ 为正整数，求 n 的最大值.

解　当 $a_1=a_2=\cdots=a_k=1$ 时，$n=k^2$，下面证明 k^2 为最大值.

设 k 个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 使 $n=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2}{a_1a_2\cdots a_k}$ 为正整数，由最小数原理，可设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 使 $n=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2}{a_1a_2\cdots a_k}$ 成立，且使 $a_1+a_2+\cdots+a_k$ 的值最小的 k 个正整数.

由 $n=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2}{a_1a_2\cdots a_k}\Leftrightarrow a_1^2+(2a_2+2a_3+\cdots+2a_k-na_2a_3\cdots a_k)a_1+(a_2+a_3+\cdots+a_k)^2=0$. 把上式看成 a_1 的二次方程，设另一根为 a'_1，则 $a_1+a'_1=na_2a_3\cdots a_n-2a_2-2a_3-\cdots-2a_k$，$a_1a'_1=(a_2+a_3+\cdots+a_k)^2$. 因 a_1 为正整数，所以 a'_1 也为正整数. 因此，$a'_1,a_2,\cdots,a_k$ 也满足 $n=\frac{(a'_1+a_2+\cdots+a_k)^2}{a'_1a_2\cdots a_k}$. 由定义，知 $a_1\leqslant a'_1=\frac{(a_2+a_3+\cdots+a_k)^2}{a_1}$，故 $a_1\leqslant a_2+a_3+\cdots+a_k$.

由对称性，不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_k$.

记 $f(x)=\frac{(x+a_2+\cdots+a_k)^2}{xa_2\cdots a_k}=\frac{x+\frac{(a_2+\cdots+a_k)^2}{x}+2(a_2+\cdots+a_k)}{a_2\cdots a_k}$

则易知 $f(x)$ 在区间 $(0,a_2+\cdots+a_k]$ 上是减函数，而 $0<a_2\leqslant a_1\leqslant a_2+\cdots+a_k$，故

$$n=f(a_1)\leqslant f(a_2)=\frac{(a_2+a_2+a_3+\cdots+a_k)^2}{a_2a_2a_3\cdots a_k}$$

$$\leqslant\frac{(a_2+a_2+a_3+\cdots+a_k)^2}{a_2^2}\leqslant\frac{(a_2+a_2+\cdots+a_2)^2}{a_2^2}=k^2.$$

所以 n 的最大值为 k^2.

例 10 (第 47 届 IMO 试题)求最小的实数 M,使得对所有的实数 $a、b、c$,有

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)|\leqslant M(a^2+b^2+c^2)^2.$$

解 首先考虑 $P(t)=tb(t^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ct(c^2-t^2)$.

易知 $P(b)=P(c)=P(-c-b)=0$. 则有

$$\begin{aligned}&|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)|\\=&|P(a)|=|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)|.\end{aligned}$$

于是,原不等式等价于 $|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)|\leqslant M(a^2+b^2+c^2)^2$.

由对称性,不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$,则有 $|(a-b)(b-c)|=(b-a)(c-b)\leqslant \left[\frac{(b-a)+(c-b)}{2}\right]^2=\frac{(c-a)^2}{4}$,且等号成立的充分必要条件是 $b-a=c-b$,即 $2b=a+c$.

又 $\left[\frac{(c-b)+(b-a)}{2}\right]^2\leqslant\frac{(c-b)^2+(b-a)^2}{2}$

$\Rightarrow 3(c-a)^2\leqslant 2[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2]$,且等号成立的充分必要条件是 $2b=a+c$.

故

$$\begin{aligned}&|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)|\\ \leqslant&\frac{1}{4}|(c-a)^3(a+b+c)|\\ =&\frac{1}{4}\sqrt{(c-a)^6(a+b+c)^2}\\ \leqslant&\frac{1}{4}\sqrt{\left\{\frac{2[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2]}{3}\right\}^3(a+b+c)^2}\\ \leqslant&\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\sqrt[4]{\left[\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}\right]^3(a+b+c)^2}\right\}^2.\end{aligned}$$

由加权算术—几何平均不等式有

$$\begin{aligned}&|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)|\\ \leqslant&\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2+(a+b+c)^2}{4}\right]^2\\ =&\frac{9\sqrt{2}}{32}(a^2+b^2+c^2)^2.\end{aligned}$$

于是,$M=\frac{9\sqrt{2}}{32}$,且等号成立的充分必要条件是 $2b=a+c$,以及

$$\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}=(a+b+c)^2.$$

解得 $2b=a+c$, $(c-a)^2=18b^2$.

取 $b=1$,得 $a=1-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 和 $c=1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

从而,当$(a, b, c) = \left(1-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 1, 1+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$时,等号成立,故$M = \frac{9\sqrt{2}}{32}$.

例 11 (第 18 届北欧数学竞赛)设整数列$x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{n1}$, $n>2$, n为奇数,且x_{i1}不全相等. 令$x_{i(k+1)} = \frac{1}{2}(x_{ik}+x_{(i+1)k})$, $i=1, 2, \cdots, n-1$, $x_{n(k+1)} = \frac{1}{2}(x_{nk}+x_{1k})$. 证明:存在$j$和$k$,使得$x_{jk}$不是整数.

解 选取证明一个引理.

引理 记函数$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} |a_i - a_j|$,则对于题设数列组$x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{nt}$,有$f(x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{nt}) > f(x_{1(t+1)}, x_{2(t+1)}, \cdots, x_{n(t+1)})$.

引理的证明 由于$x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{n1}$不完全相同,且$n$为奇数,因此对于任意$i(i=1, 2, \cdots)$, $x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{ni}$不完全相同.

不失一般性,设$x_{(n+1)t} = x_{1t}$, $x_{(n+2)t} = x_{2t}$,则

$$f(x_{1(t+1)}, x_{2(t+1)}, \cdots, x_{n(t+1)}) = \sum_{1\leqslant k<p\leqslant n}\left|\frac{x_{kt}+x_{(k+1)t}}{2} - \frac{x_{pt}+x_{(p+1)t}}{2}\right|$$

$$= \sum_{\substack{1\leqslant k<p\leqslant n\\ k\neq p-1}}\left|\frac{x_{kt}+x_{(k+1)t}}{2} - \frac{x_{pt}+x_{(p+1)t}}{2}\right| + \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x_{kt}+x_{(k+1)t}}{2} - \frac{x_{(k+1)t}+x_{(k+2)t}}{2}\right|$$

$$\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant k<p\leqslant n\\ k\neq p-1}}\left(\frac{|x_{kt}-x_{pt}|}{2} + \frac{|x_{(k+1)t}-x_{(p+1)t}|}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x_{kt}-x_{(k+2)t}}{2}\right|$$

$$= \sum_{\substack{1\leqslant k<p\leqslant n\\ k\neq p-1}}|x_{kt}-x_{pt}| + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}|x_{kt}-x_{(k+2)t}|$$

$$\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant k<p\leqslant n\\ k\neq p-1}}|x_{kt}-x_{pt}| + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(|x_{kt}-x_{(k+1)t}| + |x_{(k+1)t}-x_{(k+2)t}|)$$

$$= \sum_{\substack{1\leqslant k<p\leqslant n\\ k\neq p-1}}|x_{kt}-x_{pt}| + \sum_{k=1}^{n}|x_{kt}-x_{(k+1)t}|$$

$$= \sum_{1\leqslant k<p\leqslant n}|x_{kt}-x_{pt}| = f(x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{nt})$$

当且仅当$x_{1t} = x_{2t} = \cdots = x_{nt}$时上式取等号,而由题设知,等号不成立.

因此,$f(x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{nt}) > f(x_{1(t+1)}, x_{2(t+1)}, \cdots, x_{n(t+1)})$,引理证毕.

下面证明原题.

不妨设$x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{n1}$为一组反例.

假设任意$x_{ik}(i=1, 2, \cdots, n; k=1, 2, \cdots)$为整数,则$f(x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{nt})$均为正整数. 又由于$f(x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{nt})$为一个有限大的一个数,由引理$f(x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{nt}) > f(x_{1(t+1)}, x_{2(t+1)}, \cdots, x_{n(t+1)})$矛盾.

思考交流

思考题 1 (2005 年 IMO 中国国家集训队选拔试题)设 $a_1, a_2, \cdots, a_6$；$b_1, b_2, \cdots, b_6$；$c_1, c_2, \cdots, c_6$ 都是 1, 2, …, 6 的排列，求 $\sum_{i=1}^{6} a_i b_i c_i$ 的最小值.

解 记 $S=\sum_{i=1}^{6} a_i b_i c_i$. 由平均不等式，得 $S \geqslant 6\sqrt[6]{\prod_{i=1}^{6} a_i b_i c_i}=6\sqrt[6]{(6!)^3}=6\sqrt{6!}=72\sqrt{5}>160$.

下面证明 $S>161$.

因为 $a_1b_1c_1, a_2b_2c_2, \cdots, a_6b_6c_6$ 这 6 个数的几何平均值为 $12\sqrt{5}$，而 $26<12\sqrt{5}<27$，则 $a_1b_1c_1, a_2b_2c_2, \cdots, a_6b_6c_6$ 中必有 1 个数不小于 27，也必有 1 个数不大于 26，而 26 不是 1, 2, 3, 4, 5, 6 中某 3 个数(可以重复)的积，所以，必有 1 个数不大于 25. 不妨设 $a_1b_1c_1=27$，$a_2b_2c_2=25$，于是，有

$$
\begin{aligned}
S&=\left(\sqrt{a_1b_1c_1}-\sqrt{a_2b_2c_2}\right)^2+2\sqrt{a_1b_1c_1a_2b_2c_2}+(a_3b_3c_3+a_4b_4c_4)+(a_5b_5c_5+a_6b_6c_6)\\
&\geqslant(\sqrt{27}-\sqrt{25})^2+2\sqrt{a_1b_1c_1a_2b_2c_2}+2\sqrt{a_3b_3c_3a_4b_4c_4}+2\sqrt{a_5b_5c_5a_6b_6c_6}\\
&\geqslant(3\sqrt{3}-5)^2+2\times3\sqrt[6]{\prod_{i=1}^{6}a_ib_ic_i}\\
&=(3\sqrt{3}-5)^2+72\sqrt{5}>161,
\end{aligned}
$$

所以，$S\geqslant162$.

又当 $a_1, a_2, \cdots, a_6$；$b_1, b_2, \cdots, b_6$；$c_1, c_2, \cdots, c_6$ 分别为

1, 2, 3, 4, 5, 6；5, 4, 3, 6, 1, 2；5, 4, 3, 1, 6, 2 时，有

$S=1\times5\times5+2\times4\times4+3\times3\times3+4\times6\times1+5\times1\times6+6\times2\times2=162$.

故 S 的最小值为 162.

思考题 2 对于每个正整数 n，将 n 表示成 2 的非负整数次方的和，令 $f(n)$ 为正整数 n 的不同表示法的个数.

如果两个表示法的差别仅在于它们中各个数相加的次序不同，这两个表示法就被视为是相同的. 例如，$f(4)=4$，因为 4 恰有下列四种表示法：4；2+2；2+1+1；1+1+1+1. 证明：对于任意整数 $n\geqslant3$，$2^{\frac{n^2}{4}}<f(2^n)<2^{\frac{n^2}{2}}$.

证明 对于任意一个大于 1 的奇数 $n=2k+1$，n 的任一表示中必含一个 1. 去掉这个 1 就得到 $2k$ 的一个表示. 反之，给 $2k$ 的任一表示加上一个 1 就得到 $2k+1$ 的一个表示. 这显然是 $2k+1$ 和 $2k$ 的表示之间的一个一一对应. 从而有如下递归式：

$$f(2k+1)=f(2k). \tag{1}$$

对于任意正偶数 $n=2k$，其表示可以分为两类：含有 1 的与不含 1 的. 对于前者，去掉一个 1 就得到 $2k-1$ 的一个表示；对于后者，将每一项除以 2，就得到 k 的一个表示. 这两种变换都是可逆的，从而都是一一对应. 于是得到第二个递归式：

$$f(2k)=f(2k-1)+f(k). \tag{2}$$

(1)、(2)式对于任意 $k\geqslant 1$ 都成立. 显然 $f(1)=1$. 定义 $f(0)=1$，则(1)式对于 $k=0$ 也成立. 根据(1)、(2)式，函数 f 是不减的.

由(1)式，可以将(2)式中的 $f(2k-1)$ 换成 $f(2k-2)$，得到 $f(2k)-f(2k-2)=f(k)$，$k=1, 2, 3, \cdots$，给定任一正整数 $n\geqslant 1$，将上式对于 $k=1, 2, \cdots, n$ 求和，得到

$$f(2n)=f(0)+f(1)+\cdots+f(n),\ n=1, 2, 3, \cdots. \tag{3}$$

下面先证明上界，在(3)式中，右端所有的项都不大于最后一项，对于 $n\geqslant 2$，$2=f(2)\leqslant f(n)$. 于是有

$f(2n)=2+(f(2)+\cdots+f(n))\leqslant 2+(n-1)f(n)\leqslant f(n)+(n-1)f(n)=nf(n)$，$n=2, 3, 4, \cdots$，从而得到

$f(2^n)\leqslant 2^{n-1}\cdot f(2^{n-1})\leqslant 2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot f(2^{n-2})\leqslant 2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot 2^{n-3}\cdot f(2^{n-3})\leqslant\cdots\leqslant 2^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}\cdot f(2)=2^{n(n-1)/2}\cdot 2$.

因为当 $n\geqslant 3$ 时，有 $2^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot 2<2^{\frac{n^2}{2}}$，因此上界得证.

为了证明下界，我们先证明对于具有相同奇偶性的正整数 $b\geqslant a\geqslant 0$，有如下不等式成立：

$$f(b+1)-f(b)\geqslant f(a+1)-f(a) \tag{4}$$

事实上，如果 a、b 同为偶数，则由(1)式知上式两端均等于 0. 而当 a、b 同为奇数时，由(2)式知 $f(b+1)-f(b)=f\left(\frac{(b+1)}{2}\right)$，$f(a+1)-f(a)=f((a+1)/2)$. 由函数 f 是不减的即得不等式(4)成立.

任取正整数 $r\geqslant k\geqslant 1$，其中 r 为偶数，在(4)式中依次令 $a=r-j$，$b=r+j$，$j=0, 1, \cdots, k-1$. 然后将这些不等式加起来，得到

$$f(r+k)-f(r)\geqslant f(r+1)-f(r-k+1).$$

因为 r 是偶数，所以 $f(r+1)=f(r)$，从而 $f(r+k)+f(r-k+1)\geqslant 2f(r)$，$k=1, 2, \cdots, r$.

对于 $k=1, 2, \cdots, r$，将上述不等式相加，即得 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2r)\geqslant 2rf(r)$.

根据(3)式，上式左端等于 $f(4r)-1$. 从而对于任意偶数 $r\geqslant 2$，$f(4r)>2rf(r)+1>2rf(r)$. 取 $r=2^{m-2}$ 即得 $f(2^m)\geqslant 2^{m-1}f(2^{m-2})$. (5)

要使 $r=2^{m-2}$ 为偶数，m 须为大于 2 的整数，但是(5)式对于 $m=2$ 也成立.

显然 $f(2^2)=4>2^{\frac{2^2}{4}}$，$f(2^3)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=10>2^{\frac{3^2}{4}}$.

假设 $n \geqslant 4$，并且对 $n-2$ 已有 $2^{\frac{(n-2)^2}{4}} < f(2^{n-2})$，则由(5)，$f(2^n) \geqslant 2^{n-1} f(2^{n-2}) > 2^{n-1+\frac{(n-2)^2}{4}} = 2^{\frac{n^2}{4}}$，此对一切 $n \geqslant 2$ 下界成立.

同步检测 9

1. 一元二次方程 $ax^2+2x+1=0$，$(a\neq 0)$ 有一个正根和一个负根的充分不必要条件是　（　　）

A. $a<0$　　B. $a>0$　　C. $a<-1$　　D. $a>1$

2. 设 a、b、$c \in \mathbf{R}^+$，则 $f(x)=\sqrt{x^2+a}+\sqrt{(c-x)^2+b}$ 的最小值是　（　　）

A. $\sqrt{a}+\sqrt{c^2+b}$　　B. $\sqrt{c^2+a}+\sqrt{b}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}c+\sqrt{a}+\sqrt{b}$　　D. $\sqrt{c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$

3. 某电脑用户计划使用不超过 500 元的资金购买单价分别为 60 元、70 元的单片软件和盒装磁盘. 根据需要，软件至少买 3 片，磁盘至少买 2 盒，则不同的选购方式共有　（　　）

A. 5 种　　B. 6 种　　C. 7 种　　D. 8 种

4. 在 $\mathbf{R}$ 上定义运算 $\otimes$：$x\otimes y=x(1-y)$. 若不等式 $(x-a)\otimes(x+a)<1$ 对任意实数 x 成立，则　（　　）

A. $-1<a<1$　　B. $0<a<2$

C. $-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}$

5. 对于实数 x，规定 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，例如 $[4.21]=4$，$[-2.1]=-3$，则不等式 $2[x]^2-13[x]+18<0$ 成立的充分不必要条件是　（　　）

A. $x\in\left(2,\frac{9}{2}\right)$　　B. $x\in[3,4]$　　C. $x\in[3,5]$　　D. $x\in[2,8]$

6. 在约束条件 $\begin{cases} x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \\ x+y\leqslant s \\ y+2x\leqslant 4 \end{cases}$ 下，当 $3\leqslant s\leqslant 5$ 时，目标函数 $z=3x+2y$ 的最大值的变化范围是　（　　）

A. $[6,15]$　　B. $[7,15]$　　C. $[6,8]$　　D. $[7,8]$

7. (第十五届"希望杯"高二试题) 函数 $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-3x+3}$，则函数 $f(x)$ 的最大值与最小值之差是________.

8. (2003 年湖南省高中数学竞赛试题) 记 $\min\{a, b\}$ 为两数 a、b 的最小值，当正数 x、y 变

化时，$t=\min\left\{x, \frac{y}{x^2+y^2}\right\}$也在变化，则 t 的最大值为________.

9. 曲线 C：$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 上的点到原点距离的最小值是________.

10. 若实数 a，b，c，d，e 满足 $a+b+c+d+e=8$，$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$，则 e 的最大值与最小值之和为________.

11. (《数学通报》2006 年第 5 期数学问题）已知：x，y，$z\in\mathbf{R}_+$，且 $xyz(x+y+z)=1$，求 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 的最小值.

12. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=-n^2-9n+2(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设 $b_n=\frac{1}{n(12-a_n)}(n\in\mathbf{N}^*)$，$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，是否存在最小的正整数 m，使得不等式 $T_n<\frac{m}{32}$对一切正整数 n 总成立？如果存在，求出 m 的值，如果不存在，请说明理由.

13. (2005 年全国高中数学联赛加试题）设正数 a、b、c、x、y、z 满足 $cy+bz=a$；$az+cx=b$；$bx+ay=c$，求函数 $f(x, y, z)=\frac{x^2}{1+x}+\frac{y^2}{1+y}+\frac{z^2}{1+z}$的最小值.

14. 已知函数 $f(x)=\frac{2x^2+bx+c}{x^2+1}(b<0)$的值域是$[1, 3]$.

(1) 求 b、c 的值；

(2) 判断函数 $F(x)=\lg f(x)$，当 $x\in[-1, 1]$时的单调性，并证明你的结论；

(3) 若 $t\in\mathbf{R}$，求证：$\lg\frac{7}{5}\leqslant F\left(\left|t-\frac{1}{6}\right|-\left|t+\frac{1}{6}\right|\right)\leqslant\lg\frac{13}{5}$.

15. 实数 x_1，x_2，$\cdots$，x_{2007} 满足$\sum_{k=1}^{2006}|x_k-x_{k+1}|=2007$，令 $y_k=\frac{1}{k}(x_1+x_2+\cdots+x_k)$，$k=1$，$2$，$\cdots$，$2007$，求$\sum_{k=1}^{2006}|y_k-y_{k+1}|$的最大可能值.

16. 已知$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列，$P_n(a_n, b_n)$是曲线 C：$y=3\cdot 2^{x-1}$上的点，P_1 是曲线 C 与 y 轴的交点.

(Ⅰ) 求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式；

(Ⅱ) 令 $A_n=a_2a_3\cdots a_n$，$B_n=b_2+b_3+\cdots+b_n$，求满足 $A_n+B_n<895$ 的 n 的集合 M.

(Ⅲ) 设 $u=|\overrightarrow{P_iP_j}|$，$i$，$j\in M$，若 $u^{2t}+2u^t\leqslant 8|A_n+B_n-895|$对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

17. 设 $0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant 1$. 试求函数 $f(x, y)=(2y-1)\sin x+(1-y)\sin(1-y)x$ 的最小值.

18. (2003 年天津市高中数学竞赛试题）已知函数 $f(x)=x^2+x-2$.

(1) 试求函数 $g(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}$的表达式；

(2) 若 $a>0$ 时，直线 $y=ax+b$ 与曲线 $y=g(x)$ 交于三个不同的点，试确定 a 与 b 的关系式，并画图表示点 (a,b) 所在的区域.

19. 设实数 x, y 满足 $x^2+y^2\leqslant 5$，求 $f(x,y)=3|x+y|+|4y+9|+|7y-3x-18|$ 的最值.

20. 设正整数 $n(n\geqslant 3)$，正数 α、β 满足 $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{n-1}{n-2}$. 又 $x_i\in\mathbf{R}_+ (i=1, 2, \cdots, n)$，且 $\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}=1$，求 $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\beta}}{1-x_i^{\alpha}}$ 的最小值.

21. (1999 年国家队选拔试题)对于满足条件 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ 的非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，求 $\sum_{j=1}^{n}(x_j^4-x_j^5)$ 的最大值.

22. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n\in\mathbf{R}(n\geqslant 2)$，且满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}=1$. 试求 $\max\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|$.

23. 设无限数列 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots$ 的各项的和为 1. 其中 $a_1=\frac{1}{2k}$（k 是给定的大于 1 的自然数）. 求证：可以找到 k 个项，其中最小的数大于最大的数的一半.

24. (2005 年第 46 届 IMO 试题)某次数学竞赛共有 6 道试题，其中任意两道试题都被超过 $\frac{2}{5}$ 的参赛者答对了. 但没有一个参赛者能答对所有的 6 道试题. 证明：至少有两个参赛者都恰好答对了 5 道试题.

参考答案

同步检测 1

1. A　**2.** B　**3.** B　**4.** A

5. B　提示：　$\max\{x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_4, x_4+x_5\} \geqslant \max\{x_1+x_2, x_3+x_4, x_4+x_5\} \geqslant \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{5} x_i + x_4\right) \geqslant \frac{1}{3}$，取 $x_1 = x_3 = x_5 = \frac{1}{3}$，$x_2 = x_4 = 0$，则 $\max\{x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_4, x_4+x_5\} = \frac{1}{3}$ 故选 B.

6. A

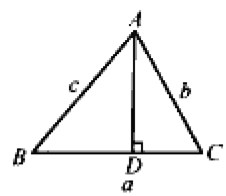


图 1 - 6

提示：$V_1 = \frac{1}{6} \cdot BD \cdot CD \cdot AD\sin\theta$

$$= \frac{1}{6} \cdot c\cos B \cdot b\cos C \cdot \frac{2\triangle}{a} \cdot \sin\theta = \frac{\triangle}{3} \cdot \frac{bc\cos B\cos C\sin\theta}{a}$$

$$= \frac{\triangle\cos A\cos B\cos C\sin\theta}{3} \cdot \frac{bc}{a\cos A}$$

$$= \frac{\triangle\cos A\cos B\cos C\sin\theta}{3} \cdot \frac{2b^2c^2}{a(-a^2+b^2+c^2)}$$

$$= \frac{2a^2b^2c^2 \cdot \triangle \cdot \cos A\cos B\cos C\sin\theta}{3} \cdot \frac{1}{a^3(-a^2+b^2+c^2)}$$

(以上 $\triangle$ 表示 $\triangle ABC$ 面积).

记 $K = \frac{2a^2b^2c^2 \cdot \triangle \cdot \cos A\cos B\cos C\sin\theta}{3}$，同理可得 $V_2 = \frac{K}{b^3(a^2-b^2+c^2)}$，$V_3 = \frac{K}{c^3(a^2+b^2-c^2)}$

由于 K 为相同值，因此，要比较 V_1、V_2、V_3 大小，即比较 $a^3(-a^2+b^2+c^2)$、$b^3(a^2-b^2+c^2)$、$c^3(a^2+b^2-c^2)$ 的大小.

因为 $a > b$、$a^2+b^2 > c^2$，

所以 $a^3(-a^2+b^2+c^2) - b^3(a^2-b^2+c^2) = -(a^3-b^3)(a^2+b^2) + c^2(a^3-b^3) - 2a^2b^2(a-b)$

$$= (a^3-b^3)(-a^2-b^2+c^2) - 2a^2b^2(a-b) < 0,$$

所以 $\frac{1}{a^3(-a^2+b^2+c^2)} > \frac{1}{b^3(a^2-b^2+c^2)}$.

所以 $V_1 > V_2$. 同理，$V_2 > V_3$.　所以 $V_1 > V_2 > V_3$，选 A.

7. $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}(1 \leqslant m < n)$ 和 $\frac{a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n}{n-m} \geqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}(1 \leqslant m < n)$

8. $\{a \mid a \leqslant 3\}$　**9.** $\frac{3}{4}$

10.
$$M-N=\left(\sum_{i=1}^{n}\tan\theta_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\cot\theta_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\sin\theta_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sin\theta_i}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\tan\theta_i\cdot\cot\theta_j+\tan\theta_j\cdot\cot\theta_i-\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_j}-\frac{\sin\theta_j}{\sin\theta_i}\right).$$

故只须证明局部各项非负，即 $\tan\theta_i\cdot\cot\theta_j+\tan\theta_j\cdot\cot\theta_i \geqslant \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_j}+\frac{\sin\theta_j}{\sin\theta_i}$.

上式通分即得　$(\sin\theta_i\cdot\cos\theta_j)^2+(\sin\theta_j\cdot\cos\theta_i)^2 \geqslant (\sin^2\theta_i+\sin^2\theta_j)\cos\theta_i\cdot\cos\theta_j$
$$\Leftrightarrow \sin^2\theta_i+\sin^2\theta_j-2\sin^2\theta_i\cdot\sin^2\theta_j \geqslant (\sin^2\theta_i+\sin^2\theta_j)\cos\theta_i\cdot\cos\theta_j$$
$$\Leftrightarrow (\sin^2\theta_i+\sin^2\theta_j)(1-\cos\theta_i\cdot\cos\theta_j) \geqslant 2\sin^2\theta_i\cdot\sin^2\theta_j.$$

由 $\sin^2\theta_i+\sin^2\theta_j \geqslant 2\sin\theta_i\cdot\sin\theta_j$ 及 $1-\cos\theta_i\cdot\cos\theta_j-\sin\theta_i\cdot\sin\theta_j=1-\cos(\theta_i-\theta_j)\geqslant 0$
知 $M \geqslant N$ 成立.

11. 将原式两边取对数，得 $\lg(x+\sqrt{x^2+1})+\lg(y+\sqrt{y^2+1})\geqslant 0$.

令 $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$，则有
$$f(-x)+f(x)=\lg(-x+\sqrt{x^2+1})+\lg(x+\sqrt{x^2+1})=\lg 1=0,$$
所以 $f(x)$ 是奇函数.

设 $x_1>x_2$，则 $x_1+\sqrt{x_1^2+1}-x_2-\sqrt{x_2^2+1}=\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+(x_1-x_2)$
$$=(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+1\right).$$

因为　$\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}>|x_1|+|x_2|\geqslant -x_1-x_2$,

所以　$\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+1>0$. 因此　$f(x_1)>f(x_2)$,

即 $f(x)$ 是增函数.

又因为 $f(x)+f(y)\geqslant 0$，所以 $f(x)\geqslant -f(y)=f(-y)$.

故 $x\geqslant -y$，即 $x+y\geqslant 0$，所以 $x+y$ 的最小值为 0.

12. ①$+c$ 得　$\frac{17}{6}c<a+b+c<3c$.　④

②$+a$ 得　$\frac{5}{2}a<a+b+c<\frac{8}{3}a$.　⑤

③$+b$ 得　$\frac{7}{2}b<a+b+c<\frac{15}{4}b$.　⑥

由④，⑤得　$\frac{17}{6}c<a+b+c<\frac{8}{3}a$,

所以 $c < \frac{6}{17} \times \frac{8}{3}a = \frac{48}{51}a < 1 \cdot a$， 所以 $c < a$.

同理，由 ④，⑥ 得 $b < c$.

所以 a，b，c 的大小关系为 $b < c < a$.

13. 一个创造性的解法是：将数列 a_1，a_2，…，a_n 排成数阵（辅助图表）

a_1，a_2，…，a_7，

a_2，a_3，…，a_8，

……

a_{11}，a_{12}，…，a_{17}

……

然后，对前 11 行 7 列横、竖分别求和（计算两次），得

$$S = \sum_{i=1}^{7}a_i + \sum_{i=2}^{8}a_i + \cdots + \sum_{i=11}^{17}a_i < 0,\ S = \sum_{i=1}^{11}a_i + \sum_{i=2}^{12}a_i + \cdots + \sum_{i=7}^{17}a_i > 0.$$

这一矛盾说明项数 $n<17$.（必要性，用了反证法）

另一方面，构造 16 项数列 6，6，−15，6，6，6，−16，6，6，−16，6，6，6，−15，6，6 适合题意，可见这样的数列最多有 16 项.（充分性，数列构造是不唯一的）

参赛的英国选手 Richard 不仅解答了这道题，而且用两个互素的正整数 p 和 q 来代替题中的 7 与 11，得出最大项数为 $p+q-2$，因此，他当之无愧地得到了特别奖.

14. 设 $\frac{a_i}{b_i} = \min\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}\right\} = k$，则 $a_i = kb_i$，而 $\frac{a_i}{b_i} \geqslant k$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$，故 $a_i \geqslant kb_i$.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \geqslant \frac{k(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = k.$$

设 $\frac{a_j}{b_j} = \max\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}\right\} = k'$，故 $a_j = k'b_j$，

而 $\frac{a_i}{b_i} \leqslant k'$，故 $a_i \leqslant k'b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$.

所以 $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leqslant \frac{k'(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = k'$.

综上所述得 $\frac{a_i}{b_i} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leqslant \frac{a_j}{b_j}$

15. $xy^4 + yz^4 + zx^4 - (yx^4 + zy^4 + xz^4)$

$= \frac{1}{2}(y-x)(z-y)(z-x)[(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2] \geqslant 0$

16. $\frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c} \cdot b^{a+c} \cdot c^{a+b}} = a^{2a-b-c}b^{2b-a-c}c^{2c-a-b}$

$= a^{a-b} \cdot a^{a-c} \cdot b^{b-c} \cdot b^{b-a} \cdot c^{c-a} \cdot c^{c-b} = \frac{a^{a-b}}{b^{a-b}} \cdot \frac{b^{b-c}}{c^{b-c}} \cdot \frac{c^{c-a}}{a^{c-a}}$. （*）

若 $a \geqslant b$，则 $a - b \geqslant 0$，$a^{a-b} \geqslant b^{a-b}$，$\frac{a^{a-b}}{b^{a-b}} \geqslant 1$；

若 $a \leqslant b$，则 $\frac{a^{a-b}}{b^{a-b}} = \frac{b^{b-a}}{a^{b-a}} \geqslant 1$. 故 $\frac{a^{a-b}}{b^{a-b}} \geqslant 1$.

同理 $\frac{b^{a-c}}{c^{b-c}} \geqslant 1$，$\frac{c^{c-a}}{a^{c-a}} \geqslant 1$，从而(＊)式 $\geqslant 1$．所以 $\frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c} \cdot b^{a+c} \cdot c^{a+b}} \geqslant 1$，

即 $a^{2a}b^{2b}c^{2c} \geqslant a^{b+c}b^{a+c}c^{a+b}$．

17. 因为 $(x-y)(x^{n-1}-y^{n-1}) \geqslant 0$，所以 $x^n+y^n \geqslant xy^{n-1}+x^{n-1}y$．

因为 $xy>0$，所以 $xy(x^n+y^n) \geqslant x^2y^n+x^ny^2$．

又因为 $0<(1-x^2)(1-y^2)=(1-xy)^2-(x-y)^2 \leqslant (1-xy)^2$．

所以 $\frac{x^n}{1-x^2}+\frac{y^n}{1-y^2}=\frac{x^n+y^n-(x^2y^n+x^ny^2)}{(1-x^2)(1-y^2)} \geqslant \frac{x^n+y^n-xy(x^n+y^n)}{(1-xy)^2}=\frac{x^n+y^n}{1-xy}$．

18. 由题设条件，得 $\begin{cases}3^x+4^x=5^a,\\5^x-3^x=4^b,\end{cases}$

两式相加，得

$$4^x+5^x=4^b+5^a. \tag{1}$$

由于函数 $f(x)=4^x+5^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$a \geqslant b$，有 $4^a \geqslant 4^b$，所以(1)式可得

$$f(x) \leqslant 4^a+5^a=f(a),$$

即 $x \leqslant a$．

说明：类似可证 $b \leqslant x$．

19. 设从出发地到指定地点的路程为 S，甲乙两人走完全程所需时间分别是 t_1，t_2．

则：$\frac{t_1}{2}m+\frac{t_1}{2}n=S$，$\frac{S}{2m}+\frac{S}{2n}=t_2$　可得：$t_1=\frac{2S}{m+n}$，$t_2=\frac{S(m+n)}{2mn}$．

所以 $t_1-t_2=\frac{2S}{m+n}-\frac{S(m+n)}{2mn}=\frac{S[4mn-(m+n)^2]}{2(m+n)mn}=-\frac{S(m-n)^2}{2mn(m+n)}$．

因为 S，m，n 都是正数，且 $m \neq n$，所以 $t_1-t_2<0$　即：$t_1<t_2$．

从而甲先到达指定地点．

20. 由 $f(1)=a+b$，$f(-1)=a-b$ 可解得：

$$a=\frac{1}{2}(f(1)+f(-1)),\ b=\frac{1}{2}(f(1)-f(-1)). \tag{＊}$$

将以上二式代入 $f(x)=ax^2+bx$，并整理得

$f(x)=f(1)\left(\frac{x^2+x}{2}\right)+f(-1)\left(\frac{x^2-x}{2}\right)$，

所以 $f(-2)=f(1)+3f(-1)$．

又因为 $2 \leqslant f(1) \leqslant 4$，$1 \leqslant f(-1) \leqslant 2$，所以 $5 \leqslant f(-2) \leqslant 10$．

21. 设 $x_1 \cdots x_k$ 最大，不妨设 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_k$，则 $x_k-x_1 \leqslant 1$．否则 $x_k-x_1=2n$ 或 $2n+1$（n 为自然数）．

当 $x_k-x_1=2n$ 时，$x_1+x_k=2(x_1+n)$，则 $x_1x_k=x_1(x_1+2n)<(x_1+n)^2$，$x_1 \cdots x_n<(x_1+n)x_2 \cdots x_{n-1} \cdot (x_1+n)$，即 $x_1 \cdots x_n$ 不是最大．如 $x_k-x_1=2n+1$，类似知 $x_1 \cdots x_k$ 不是最大．可见，当 $x_1 \cdots x_k$ 最大时，$x_k-x_1 \leqslant 1$．

其次证：最大积中只能有 t 和 $t+1$．

① 由前知，x_i 中不可能有大于 t 的又有小于 t 的；

② x_i 不可能都大于 t，否则 $x_1+\cdots+x_k \geqslant k(t+1)>N$；

③ x_i 中不能有 $t-1$，否则由于 $N \geqslant kt$，必有 $t+1$，与①矛盾．

则 N 可唯一地表为 $(k-r)t+r(t+1)$，

故 $x_1\cdots x_k = t^{k-r}(t+1)^r$.

22. 设 $A=n^4+6n^3+11n^2+3n+31$，则 $A=(n^2+3n+1)^2-3(n-10)$ 是完全平方数. 当 $n>10$ 时，$A<(n^2+3n+1)^2$，所以 $A\leqslant(n^2+3n)^2$，即 $(n^2+3n+1)^2-(n^2+3n)^2\leqslant 3n-30$，$2n^2+3n+31\leqslant 0$，这不可能.

当 $n=10$ 时，$A=(10^2+3\times10+1)^2=131^2$ 是完全平方数.

当 $n<10$ 时，$A>(n^2+3n+1)^2$.

若 $n\leqslant-3$，或 $n\geqslant0$，则 $n^2+3n\geqslant0$，于是 $A\geqslant(n^2+3n+2)^2$，$2n^2+9n-27\leqslant0$，

$$-7<\frac{-3(\sqrt{33}+3)}{4}\leqslant n\leqslant\frac{3(\sqrt{33}-3)}{4}<3.$$

所以 $n=-6,-5,-4,-3,0,1,2$，此时对应的 $A=409,166,67,40,31,52,145$ 都不是完全平方数.

若 $n=-2,-1$ 时，与之对应的 $A=37,34$ 也都不是完全平方数.

所以，只有当 $n=10$ 时，A 是完全平方数.

23. 因为 $f\left(\frac{1}{n^2+3n+1}\right)=f\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)-1}\right)=f\left(\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{1-\frac{1}{(n+1)(n+2)}}\right)=f\left(\frac{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}{1-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2}}\right)$

$=f\left(\frac{1}{n+1}\right)+f\left(-\frac{1}{n+2}\right)$. 在(1)中令 $x=y=0$，得 $f(0)=0$. 又令 $x=-y$，得 $f(x)+f(-x)=0$. 所以 $f(-x)=-f(x)$.

故 $f\left(\frac{1}{n^2+3n+1}\right)=f\left(\frac{1}{n+1}\right)-f\left(\frac{1}{n+2}\right)$. 所以 $f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{11}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n^2+3n+1}\right)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{3}\right)\right]+\left[f\left(\frac{1}{3}\right)-f\left(\frac{1}{4}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{1}{n+1}\right)-f\left(\frac{1}{n+2}\right)\right]=f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{n+2}\right)>f\left(\frac{1}{2}\right)$

24. 解：由方程的对称性，不妨设 $x\geqslant y\geqslant z>0$，将方程变形为：$n=\frac{x}{y^2z^2}+\frac{y}{x^2z^2}+\frac{z}{y^2x^2}$. ①

另一方面，由原方程得：$y^3+z^3=x^2(ny^2z^2-x)$， ②

ny^2z^2-x 为正整数，得 $ny^2z^2-x\geqslant1$.

于是由 ② 得 $y^3+z^3\geqslant x^2$，即 $x\leqslant\sqrt{y^3+z^3}$，$x\geqslant y\geqslant z>0$ 又代入 ① 式得

$$n\leqslant\frac{\sqrt{y^3+z^3}}{y^2z^2}+\frac{y}{y^2z^2}+\frac{z}{y^2z^2}=\sqrt{\frac{1}{y^4z}+\frac{1}{yz^4}}+\frac{1}{yz^2}+\frac{1}{y^2z}. \quad ③$$

(1) 当 $z\geqslant2$ 时，由于 $y\geqslant z$，由 ③ 式得 $n\leqslant\frac{1}{2}$，与 n 为正整数矛盾!

(2) 当 $z=1$ 时，得 $y\geqslant z=1$；

(ⅰ) 若 $y=1$，由 $x^2\leqslant y^3+z^3=2$，得 $x=1$，这时可得 $n=3$，方程的解为 $(x,y,z)=(1,1,1)$.

(ⅱ) 若 $y\geqslant2$，又 $z=1$，由 ③ 式得 $n\leqslant\frac{3}{2}$，故只能 $n=1$，原方程变形为：$x^3+y^3+1=x^2y^2$.

这时有正整数解 $(x, y, z) = (3, 2, 1)$.

综上所述, n 的值为 1 或 3.

25. 设这 8 个物品的重量从重到轻依次排列为:

$$15 \geqslant a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 > a_7 > a_8 \geqslant 1.$$

小平找出的这个物品重量为 a_5, 第二轻的物品重量为 a_7.

由于 a_5 加上一个比它轻的物品不可能大于两个比 a_5 重的物品重量之和, 因而第一次必须筛去 3 个比 a_5 重的物品.

这样就有以下四种可能:

第一种 $\begin{cases} a_4 + a_5 + a_6 + a_7 > a_1 + a_2 + a_3 + a_8, & ① \\ a_5 + a_6 > a_1 + a_7, & ② \\ a_5 > a_6, & ③ \end{cases}$

第二种 $\begin{cases} a_3 + a_5 + a_6 + a_7 > a_1 + a_2 + a_4 + a_8, \\ a_5 + a_6 > a_3 + a_7, \\ a_5 > a_6, \end{cases}$

第三种 $\begin{cases} a_2 + a_5 + a_6 + a_7 > a_1 + a_3 + a_4 + a_8, \\ a_5 + a_6 > a_2 + a_7, \\ a_5 > a_6, \end{cases}$

第四种 $\begin{cases} a_1 + a_5 + a_6 + a_7 > a_2 + a_3 + a_4 + a_8, \\ a_5 + a_6 > a_1 + a_7, & ④ \\ a_5 > a_6, \end{cases}$

先考虑第一种情况. 根据①式, a_4 比 a_1 至少轻 3 克, a_5 比 a_2, a_6 比 a_3 也都至少轻 3 克, 则 a_7 比 a_8 至少重 10 克. 根据②式, a_5 比 a_1 至少轻 1 克, 则 a_6 比 a_7 至少重 18 克. 与已知矛盾, 第一种情况不可能出现.

按同样的推理方法, 可以说明第二种和第三种情况也不可能出现.

最后, 考虑第四种情况. a_1 比 a_2 至少重 1 克; a_5 比 a_3, a_6 比 a_4 都至少轻 2 克, 则 a_7 比 a_8 至少重 4 克. 根据④式, a_5 比 a_1 至少轻 4 克, 则 a_6 比 a_7 至少重 5 克. 这样得到的这 8 个物品的重量分别为:

$a_1 = 15$ 克, $a_2 = 14$ 克, $a_3 = 13$ 克, $a_4 = 12$ 克,

$a_5 = 11$ 克, $a_6 = 10$ 克, $a_7 = 5$ 克, $a_8 = 1$ 克.

因此, 小平找出的这个物品重 11 克, 第二轻的物品重 5 克.

同步检测 2

1. C **2.** D **3.** D

4. C 由 $\sin^3\theta - \cos^3\theta \geqslant \cos\theta - \sin\theta$, 得 $(\sin\theta - \cos\theta)\left(2 + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) \geqslant 0$. 因为 $2 + \frac{1}{2}\sin 2\theta > 0$, 所以 $\sin\theta - \cos\theta \geqslant 0$, 解得 $\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{5\pi}{4}$.

5. 解 原不等式等价于 $\begin{cases} \sqrt{\log_2 x - 1} - \frac{3}{2}\log_2 x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} > 0 \\ \log_2 x - 1 \geqslant 0 \end{cases}$

设 $\sqrt{\log_2 x-1}=t$，则有 $\begin{cases}t-\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{1}{2}>0\\ t\geqslant 0\end{cases}$ 解得 $0\leqslant t<1$.

即 $0\leqslant \log_2 x-1<1$，所以 $2\leqslant x<4$. 故选 C.

6. 解 设 $y=\lg x$，则有 $y^2-(2+m)y+m-1>0$. 由于这是一个含有字母的一元二次不等式，直接讨论很复杂. 变更主元，将它按 m 进行整理，得 $(1-y)m+(y^2-2y-1)>0(y\neq 1)$.

又设 $f(m)=(1-y)m+(y^2-2y-1)$，则 $f(m)$ 是 m 的一次函数，因为一次函数是单调函数，因此当 $-1\leqslant m\leqslant 1$ 时 $f(m)>0$，只须

$$\begin{cases}f(1)>0\\ f(-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-3y>0\\ y^2-y-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y<0\text{ 或 }y>3\\ y<-1\text{ 或 }y>2\end{cases}$$

所以 $y<-1$ 或 $y>3$，即 $\lg x<-1$ 或 $\lg x>3$，解得 $0<x<\dfrac{1}{10}$ 或 $x>10^3$，选 C.

7. 解 由 $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)>\cos x$，可得 $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)>0$，解得 $\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{4\pi}{3}$.

8. 解 由 $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}\right)^2=1$. 所以 $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}\leqslant\sqrt{2}$. 当 $x=y$ 时取等号，故 a 的最小值是 $\sqrt{2}$.

9. 解 原不等式可化为 $\left(\cos x-\dfrac{a-1}{2}\right)^2\leqslant a^2+\dfrac{(a-1)^2}{4}$.

因为 $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$，$a<0$，$\dfrac{a-1}{2}<0$，

所以当 $\cos x=1$ 时，函数 $y=\left(\cos x-\dfrac{a-1}{2}\right)^2$ 有最大值 $\left(1-\dfrac{a-1}{2}\right)^2$，

从而有 $\left(1-\dfrac{a-1}{2}\right)^2\leqslant a^2+\dfrac{(a-1)^2}{4}$，整理得 $a^2+a-2\geqslant 0$，

所以 $a\geqslant 1$ 或 $a\leqslant -2$，又 $a<0$，所以 $a\leqslant -2$.

10. 解 设 $t=\min\left\{\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b^2},\dfrac{1}{c^3},a+b^2+c^3\right\}$，则 $0<t\leqslant\dfrac{1}{a}$，$0<t\leqslant\dfrac{1}{b^2}$，$0<t\leqslant\dfrac{1}{c^3}$，即有 $a\leqslant\dfrac{1}{t}$，$b^2\leqslant\dfrac{1}{t}$，$c^3\leqslant\dfrac{1}{t}$. 所以有 $t\leqslant a+b^2+c^3\leqslant\dfrac{3}{t}$. 于是可得 $t\leqslant\sqrt{3}$，且当 $a=b^2=c^3=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$t=\sqrt{3}$.

因此 $\max\limits_{a,b,c\in\mathbf{R}^+}\min\left\{\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b^2},\dfrac{1}{c^3},a+b^2+c^3\right\}=\sqrt{3}$.

11. 设 $y=\sqrt{4x-2}+2\sqrt{3-x}$，

由 $\begin{cases}4x-2\geqslant 0\\ 3-x\geqslant 0\end{cases}$，得定义域为 $\left[\dfrac{1}{2},3\right]$.

因为 $y^2=4x-2+4(3-x)+4\sqrt{(4x-2)(3-x)}=10+4\sqrt{-4x^2+14x-6}\geqslant 10$，

所以 $y\geqslant\sqrt{10}>\dfrac{2000}{1999}$，即原不等式在定义域内恒成立，

故所求解集为 $\left[\dfrac{1}{2},3\right]$.

12. $(-2,-1)\cup(-1,0)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$.

令 $g(x)=ax^2+(a+2)x+a+2$，当 $g(x)$ 存在大于零的最小值或最大值时，$f(x)$ 才有可能有最值.

$g(x)$ 有最小值时，$a>0$，$\Delta<0\Rightarrow a>\frac{2}{3}$；

$g(x)$ 有最大值时，$a<0$，$\Delta>0\Rightarrow -2<a<0$；

综合对数底数情况，当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 有最小值；当 $-1<a<0$ 时，$f(x)$ 有最大值；当 $-2<a<-1$ 时，$f(x)$ 有最小值.

13. 因为 $\boldsymbol{a}=(1,x)$，$\boldsymbol{b}=(x^2+x,-x)$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x^2+x-x^2=x$；故不等式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2>m\left(\frac{2}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}+1\right)$ 等价于 $x+2>m\left(\frac{2}{x}+1\right)$，整理该式可得 $\frac{(x+2)(x-m)}{x}>0$，

即 $x(x+2)(x-m)>0$. 下面可分类讨论：

(1) 若 $m=-2$ 时，x 的取值范围是 $(0,+\infty)$；

(2) 若 $m<-2$ 时，x 的取值范围是 $(m,-2)\cup(0,+\infty)$.

14. 把所说的不等式变形为 $-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\leqslant px+q\leqslant\sqrt{1-x^2}+\frac{\sqrt{2}-1}{2}(0\leqslant x\leqslant 1)$.

分别以点 $A\left(0,\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$，$B\left(0,-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ 为圆心，半径为1作两个圆，即圆 A 和圆 B.（读者可根据证明中的叙述画图）圆 A 的两端点为 $\left(0,\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$，$\left(1,\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$，且位于第一象限内的弧记为 l_1；圆 B 的两端点为 $\left(0,\frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)$，$\left(1,-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$，且位于第一、四象限内的弧记为 l_2，则上面变形后的不等式意味着当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，直线 $y=px+q$ 位于 l_1 和 l_2 之间.

为了确定 p、q，只需注意连接 l_1 两个端点的直线恰好与圆 B（从而与 l_2）相切，因此直线 $y=px+q$ 必然经过 l_1 的两个端点，从而 $p=-1$，$q=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

15. (1) 设 $x_1>x_2\geqslant 0$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\sqrt[3]{1+x_1}-\sqrt[3]{1+x_2}-\lambda(x_1-x_2)=(x_1-x_2)\left[\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x_1)^2}+\sqrt[3]{(1+x_1)(1+x_2)}+\sqrt[3]{(1+x_2)^2}}-\lambda\right]$. 显然，$\sqrt[3]{(1+x_1)^2}+\sqrt[3]{(1+x_1)(1+x_2)}+\sqrt[3]{(1+x_2)^2}>3$. 故当 $\lambda\geqslant\frac{1}{3}$ 时，$f(x_1)-f(x_2)<0$，

这就证明了 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是减函数.

容易验证，$\lambda\geqslant\frac{1}{3}$ 的范围已是最大的了.

(2) 上面的单调递减区间 $[0,+\infty)$ 不能再扩大，这可以用反证法加以证明，这里从略.

(3) 由(1)、(2)知，函数 $u=2x-\sqrt[3]{1+x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的. 又 $u(7)=12$，故原不等式的解集为 $(-\infty,7)$.

16. 原不等式化为 $(\sin\theta+\cos\theta+1)x^2-(2\sin\theta+1)x+\sin\theta>0$.

设 $f(x)=(\sin\theta+\cos\theta+1)x^2-(2\sin\theta+1)x+\sin\theta$，$x\in[0,1]$，要使 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)>0$ 恒

成立，必须使 $f(0)>0$，且 $f(1)>0$，即 $\sin\theta>0$ 且 $\cos\theta>0$，则 θ 是第一象限角，$\sin\theta+\cos\theta+1>0$，此时抛物线的开口向上，其对称轴方程为 $x=\dfrac{2\sin\theta+1}{2(\sin\theta+\cos\theta+1)}$.

因为 $2(\sin\theta+\cos\theta+1)>2\sin\theta+1>0$，所以 $0<\dfrac{2\sin\theta+1}{2(\sin\theta+\cos\theta+1)}<1$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上最小值为顶点纵坐标，即

$$f(x)_{\min}=\frac{4(\sin\theta+\cos\theta+1)\sin\theta-(2\sin\theta+1)^2}{4(\sin\theta+\cos\theta+1)},$$

当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)>0$ 恒成立充要条件是 $f(x)$ 最小值取正值.

综上所述，得 $f(x)>0$，

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\theta>0,\\ \cos\theta>0,\\ 4(\sin\theta+\cos\theta+1)\sin\theta-(2\sin\theta+1)^2>0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2k\pi<\theta<2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ \sin2\theta>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2k\pi<\theta<2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ k\pi+\dfrac{\pi}{12}<\theta<k\pi+\dfrac{5}{12}\pi.\end{cases}$$

所以 $2k\pi+\dfrac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\dfrac{5}{12}\pi(k\in\mathbf{Z})$.

17. ① 当 $x=y$ 时，原不等式为 $x^2(x+\sqrt{2}x)+x^2(\sqrt{2}x+x)+2x^2(x+x)\geqslant\sqrt{2}kx^3\Leftrightarrow k\leqslant2+3\sqrt{2}$.

② 下面证明 $k\leqslant2+3\sqrt{2}$，即证 $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)\geqslant(2+3\sqrt{2})xyz$.

不妨设 $z=1$，$x\leqslant y$，x 边所对锐角为 θ，则 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]$，$t=\sin\theta\cos\theta\leqslant\dfrac{1}{2}$.

于是 $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=1+(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta\cos\theta+1)$

$$\geqslant1+2\sqrt{t}(t+1)\geqslant1+2\sqrt{2}t(1+t)(\sqrt{2}t\leqslant\sqrt{t})$$

$$=\left(2\sqrt{2}t^2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\sqrt{2}t+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\geqslant2\sqrt{2}t+2\sqrt{2}t+2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)t$$

$$=(2+3\sqrt{2})t=(2+3\sqrt{2})\sin\theta\cos\theta=(2+3\sqrt{2})xyz.$$

上式当且仅当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，等号成立，故 k 的最大值为 $2+3\sqrt{2}$.

18. 当 $x=y$ 时，原不等式成立，此时 k 可为任意正数.

当 $x\neq y$ 时，不妨设 $x>y$，令 $m=\dfrac{k}{2}$，$x=m+t$，$y=m-t$，$(0<t<m)$，则原不等式化为

$$\left(m+t+\frac{1}{m+t}\right)\left(m-t+\frac{1}{m-t}\right)\geqslant\left(m+\frac{1}{m}\right)^2,$$

化简整理得 $t^2\geqslant\dfrac{m^4-4m^2-1}{m^2}$. (1)

显然，欲使(1)式恒成立，当且仅当 $m^4-4m^2-1\leqslant0$，即 $m^2\leqslant2+\sqrt{5}$，

亦即 $0<m\leqslant\sqrt{2+\sqrt{5}}$，从而 $0<k\leqslant2\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

19. 解 因为$(a+b)^2+(a+b+4c)^2=(a+b)^2+[(a+2c)+(b+2c)]^2\geqslant(2\sqrt{ab})^2+(2\sqrt{2ac}+2\sqrt{2bc})^2$
$=4ab+8ac+8bc+16c\sqrt{ab}$. 所以$\frac{(a+b)^2+(a+b+4c)^2}{abc}\cdot(a+b+c)\geqslant8\left(5\sqrt[5]{\frac{1}{2a^2b^2c}}\right)\cdot\left(5\sqrt[5]{\frac{a^2b^2c}{2^4}}\right)=100$.

当 $a=b=2c>0$ 时等号成立. 故 k 的最小值为 100.

20. 令 $a=0$, $b=27$, $x=27$, $y=2$,则原不等式为 $\lambda\leqslant4$.

下面证明 $\lambda=4$ 时题设不等式恒成立.

只须在原条件下证明$(ax^2+by^2+4xy)^3\geqslant4(ax+by)^2x^2y^2$. ①

当 x 或 y 为 0 时,式 ① 显然成立.

当 x、y 均大于 0 时,式 ① 两边同除以 x^3y^3 并令 $t=\frac{x}{y}$,则式 ① 化为

$$\left(at+\frac{b}{t}+4\right)^3\geqslant4\left(a^2t+\frac{b^2}{t}+2ab\right).$$

这里 $t\in\mathbf{R}_+$. 由于$\left(at+\frac{b}{t}\right)(a+b)=a^2t+\frac{b^2}{t}+ab\left(t+\frac{1}{t}\right)\geqslant a^2t+\frac{b^2}{t}+2ab$,

故只须证明

$$\left(at+\frac{b}{t}+4\right)^3\geqslant4\left(at+\frac{b}{t}\right)\times27. \quad ②$$

由于 $at+\frac{b}{t}+4=at+\frac{b}{t}+2+2\geqslant3\sqrt[3]{4\left(at+\frac{b}{t}\right)}$,

故$\left(at+\frac{b}{t}+4\right)^3\geqslant27\times4\left(at+\frac{b}{t}\right)$,因此,$\lambda_{max}=4$.

当且仅当 $at+\frac{b}{t}=2$,$t=1$ 或 $x=0$,$b=0$ 或 $x=0$,$y=0$ 或 $y=0$,$a=0$ 时,式 ① 等号成立.

又 $a+b=27>2$,故当且仅当 $x=0$,$a=27$,$b=0$ 或 $y=0$,$a=0$,$b=27$ 或 $x=0$,$y=0$ 时,式 ① 等号成立.

21. 由原不等式得 $\sqrt{3x-5a}>\sqrt{x-a}+1\left(x\geqslant a,且\ x\geqslant\frac{5}{3}a\right)$.

由两边平方得 $3x-5a>x-a+1+2\sqrt{x-a}(x\geqslant a)$.

故原不等式等价于 $2x-4a-1>2\sqrt{x-a}(x\geqslant a)$. ①

令 $\sqrt{x-a}=y(y\geqslant0)$,则 $x=a+y^2$.

于是,式 ① 等价于 $2y^2+2a-4a-1>2y(y\geqslant0)$,

即 $$\left(y-\frac{1}{2}\right)^2>a+\frac{3}{4}(y\geqslant0). \quad ②$$

(1) 若 $a+\frac{3}{4}<0$,即 $a<-\frac{3}{4}$,则解为 $y\geqslant0$,即 $x\geqslant a$.

(2) 若 $a+\frac{3}{4}\geqslant0$,即 $a\geqslant-\frac{3}{4}$,则$\left|y-\frac{1}{2}\right|>\sqrt{a+\frac{3}{4}}$,

即 $y>\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{3}{4}}$ 或 $0\leqslant y<\frac{1}{2}-\sqrt{a+\frac{3}{4}}$.

这时,又分为如下两种情形:

(ⅰ) 若 $\frac{1}{2} \leqslant \sqrt{a+\frac{3}{4}}$，即 $a \geqslant -\frac{1}{2}$ 时，解为 $y > \frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{3}{4}}$，则 $x > 2a+1+\sqrt{a+\frac{3}{4}}\left(a \geqslant -\frac{1}{2}\right)$.

(ⅱ) 若 $\frac{1}{2} > \sqrt{a+\frac{3}{4}}$，即 $-\frac{3}{4} \leqslant a < -\frac{1}{2}$ 时，解为 $y > \frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{3}{4}}$ 或 $0 \leqslant y < \frac{1}{2}-\sqrt{a+\frac{3}{4}}$，则 $x > 2a+1+\sqrt{a-\frac{3}{4}}$ 或 $a \leqslant x < 2a+1-\sqrt{a+\frac{3}{4}}\left(-\frac{3}{4} \leqslant a < -\frac{1}{2}\right)$.

综上所述，原不等式的解为

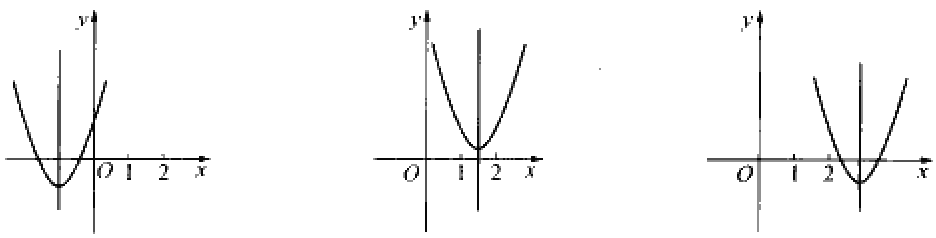
当 $a < -\frac{3}{4}$ 时，$x \geqslant a$；

当 $-\frac{3}{4} \leqslant a < -\frac{1}{2}$ 时，$a \leqslant x < 2a+1-\sqrt{a-\frac{3}{4}}$ 或 $x > 2a+1+\sqrt{a+\frac{3}{4}}$；

当 $a \geqslant -\frac{1}{2}$ 时，$x > 2a+1+\sqrt{a+\frac{3}{4}}$.

22. 因为 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上为增函数，所以在 $(1, 2)$ 上有 $f'(x) \geqslant 0$ 恒成立. 问题转化成了在 $x \in (1, 2)$ 时，$f'(x)=2x^2+(a-1)x+a \geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

画出 $f'(x)$ 的图象，以对称轴为标准，分以下三种情况讨论.（如图 2－10）



(1) (2) (3)

图 2－10

借助图象，利用函数单调性得到

$$\begin{cases} \frac{1-a}{4} \leqslant 1, \\ f'(1) \geqslant 0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} 1 < \frac{1-a}{4} < 2, \\ \Delta=(a-1)^2-8a \leqslant 0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \frac{1-a}{4} \geqslant 2, \\ f'(2) \geqslant 0, \end{cases}$$

解得 $a \geqslant -\frac{1}{2}$，所以 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

23. (1) 令 $x_1=\frac{b}{a}$，$x_2=\frac{a}{b}$，则 x_1、$x_2>0$，且 $x_1x_2=1$. 故式 ① 等价于

$$\frac{1}{(1+\lambda x_1)^2}+\frac{1}{(1+\lambda x_2)^2} \geqslant \frac{2}{(1+\lambda)^2}$$

$$\Leftrightarrow (1+\lambda)^2\left[(1+\lambda x_2)^2+(1+\lambda x_1)^2\right] \geqslant 2(1+\lambda x_2)^2(1+\lambda x_1)^2$$

$$\Leftrightarrow (1+\lambda)^2\left[2+2\lambda(x_1+x_2)+\lambda^2(x_1^2+x_2^2)\right] \geqslant 2\left[1+2(\lambda+\lambda^3)(x_1+x_2)+\lambda^2(x_1^2+x_2^2)+4\lambda^2+\lambda^4\right]$$

$\Leftrightarrow M = 4\lambda - 6\lambda^2 - 2\lambda^4 + (-2\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda)\cdot(x_1 + x_2) + (\lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2)(x_1^2 + x_2^2) \geqslant 0$.

令 $t = x_1 + x_2 \geqslant 2\sqrt{x_1 x_2} = 2$，则 $x_1^2 + x_2^2 = t^2 - 2$.

$$\begin{aligned} M &= 4\lambda - 6\lambda^2 - 2\lambda^4 + (-2\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda)t + (\lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2)(t^2 - 2) \\ &= (\lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2)t^2 - 2\lambda(\lambda - 1)^2 t - 4\lambda^4 - 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda \\ &= \lambda[(\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda)t + 2(\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1)](t - 2). \end{aligned}$$

记 $$\begin{aligned} f(t) &= (\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda)t + 2(\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1) \\ &= (\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda)(t - 2) + 2(2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 1) \\ &= \lambda(\lambda^2 + 2\lambda - 1)(t - 2) + 2(2\lambda - 1)(\lambda + 1)^2. \end{aligned}$$

由 $\lambda > 0, t \geqslant 2$，可断定不等式 ① 成立的充分必要条件是 $f(t) \geqslant 0$.

如果 $\lambda^2 + 2\lambda - 1 \leqslant 0$，方程 $\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$ 的两实根为 $-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1$. 易知，此时应有 $0 < \lambda \leqslant \sqrt{2} - 1$. 但对于 $\lambda \leqslant \sqrt{2} - 1$，有 $2\lambda - 1 < 0$. 所以，$f(t) < 0$(因为 $t \geqslant 2$)，不等式 ① 不可能成立. 故必有 $\lambda^2 + 2\lambda - 1 > 0$. 此时，$\lambda > \sqrt{2} - 1$.

若 $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$，即 $2\lambda - 1 \geqslant 0$，必有 $f(t) > 0$，不等式 ① 成立.

若 $\sqrt{2} - 1 < \lambda < \frac{1}{2}$，由于 $2(2\lambda - 1)(\lambda + 1)^2 < 0$，对固定的 λ，总能找到充分小的 $|t - 2|$，使得 $f(t) < 0$. 故 $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$ 是式 ① 成立的充分必要条件.

(2) 将上面讨论中的"$\geqslant$"号改为"$\leqslant$"号，易断定，不等式 ② 成立的充分必要条件是 $0 < \lambda \leqslant \sqrt{2} - 1$.

24. (1) 假设存在正整数数列 $\{a_n\}$ 满足条件.

因为 $a_{n+1}^2 \geqslant 2a_n a_{n+2}$，$a_n > 0$，所以，

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \leqslant \frac{1}{2^2}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}\cdot\frac{a_2}{a_1},\ n = 3, 4, \cdots.$$

又 $\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{1}{2^{2-2}}\cdot\frac{a_2}{a_1}$，则有 $\frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}\cdot\frac{a_2}{a_1}$ 对 $n = 2, 3, 4, \cdots$ 成立，所以，

$$a_n \leqslant \left(\frac{1}{2^{n-2}}\cdot\frac{a_2}{a_1}\right)a_{n-1} \leqslant \frac{1}{2^{(n-2)+(n-3)}}\cdot\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\cdot a_{n-2} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^{(n-2)+(n-3)+\cdots+1}}\cdot\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{n-2}\cdot a_2.$$

故 $a_n \leqslant \left(\frac{a_2^2}{2^{n-2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{1}{a_1^{n-2}}$.

设 $a_2^2 \in [2^k, 2^{k+1})$，$k \in \mathbf{N}$，取 $t = k + 3$，则有 $a_t \leqslant \left(\frac{a_2^2}{2^{t-2}}\right)^{\frac{t-1}{2}}\frac{1}{a_1^{t-2}} < \left(\frac{2^{k+1}}{2^{k+1}}\right)^{\frac{k+2}{2}}\cdot\frac{1}{a_1^{k+1}} \leqslant 1$，

这与 a_t 是正整数矛盾.

所以，不存在正整数的无穷数列 $\{a_n\}$ 满足条件.

(2) $a_n = \frac{\pi}{2^{(n-1)(n-2)}}$ 就是一个满足条件的正无理数的无穷数列. 此时，有 $a_{n+1}^2 = 4a_n a_{n+2} \geqslant 2a_n a_{n+2}$.

25. 设 $f(x)$ 的三个根为 α, β, γ，并设 $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$，则有

$x - a = x + \alpha + \beta + \gamma$，$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$.

(1) 当 $0 \leqslant x \leqslant \alpha$ 时，由于 $-f(x) = (\alpha - x)(\beta - x)(\gamma - x)$，利用均值不等式，可得

$$-f(x)\leqslant\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-3x}{3}\right)^3\leqslant\left(\frac{x+\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3,$$

即
$$f(x)\geqslant-\frac{1}{27}(x+\alpha+\beta+\gamma)^3=-\frac{1}{27}(x-a)^3.$$

显然，上式等号成立的充分必要条件是$\begin{cases}\alpha-x=\beta-x=\gamma-x,\\ \alpha+\beta+\gamma-3x=x+\alpha+\beta+\gamma,\end{cases}$

即 $x=0$，$\alpha=\beta=\gamma$.

(2) 当 $\beta\leqslant x\leqslant\gamma$ 时，由于

$$-f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(\gamma-x)\leqslant\left(\frac{x+\gamma-\alpha-\beta}{3}\right)^3\leqslant\left(\frac{x+\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3=\left(\frac{x-a}{3}\right)^3,$$

则 $f(x)\geqslant-\frac{1}{27}(x-a)^3$.

易知上式等号成立的充分必要条件为

$$\begin{cases}x-\alpha=x-\beta=\gamma-x,\\ \alpha=\beta=0,\end{cases}$$

即 $\alpha=\beta=0$，$\gamma=2x$.

(3) 当 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 或 $x>\gamma$ 时，$f(x)>0\geqslant-\frac{1}{27}(x-a)^3$.

综上可得，所求 $\lambda=-\frac{1}{27}$，且等号成立的充要条件是 $x=0$，$\alpha=\beta=\gamma$ 或者 $\alpha=\beta=0$，$\gamma=2x$.

同步检测 3

1. A. 设 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$，则 $a+b+c=f(1)=a(1-x_1)(1-x_2)\geqslant1$，$c=f(0)=ax_1x_2\geqslant1$. 两式相乘，得 $a^2x_1(1-x_1)\cdot x_2(1-x_2)\geqslant1$. 因为 $x_1(1-x_1)\cdot x_2(1-x_2)<\frac{1}{16}$，所以 $a^2>16$. 又 $a\in\mathbf{N}^*$，所以 $a\geqslant5$.

2. C. 利用二次函数的三点式：由 $f(0)=c$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c$，$f(1)=a+b+c$，得 $a=2f(1)-4f\left(\frac{1}{2}\right)+2f(0)$，$b=-f(1)+4f\left(\frac{1}{2}\right)-3f(0)$，$c=f(0)$. 从而 $|a|\leqslant2|f(1)|+4\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+2|f(0)|\leqslant2+4+2=8$，$|b|\leqslant|f(1)|+4\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+3|f(0)|\leqslant1+4+3=8$，$|c|=|f(0)|\leqslant1$，故 $|a|+|b|+|c|\leqslant17$. 上式等号可以成立，例如取 $f(x)=8x^2-8x+1$，$x\in[0,1]$.

3. D. 设长方体 A 的底面长、宽分别为 a_1、a_2，长方体 B 的底面长、宽分别为 b_1、b_2. 由题设得

$$\lambda=\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2}=\frac{b_1b_2}{a_1a_2},$$

即 $b_1+b_2=\lambda(a_1+a_2)$，$b_1b_2=\lambda a_1a_2$.

所以，b_1、b_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-\lambda(a_1+a_2)x+\lambda a_1a_2=0$ 的两个正根.

故 $\Delta=\lambda^2(a_1+a_2)^2-4\lambda a_1a_2\geqslant0$. 则 $\lambda\geqslant\frac{4a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}$.

又因为 $\frac{4a_1a_2}{(a_1+a_2)^2} \leqslant 1$，所以，$\lambda \geqslant 1$.

4. B　若 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_n>0$，则

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{d}$$（$n \geqslant 2, n \in \mathbf{N}_+$，$d$ 是公差）. 由此，得

$$s=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10^6}}=1+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{10^6}+\sqrt{10^6}}<1+\frac{2}{\sqrt{2}+1}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$
$$+\cdots+\frac{2}{\sqrt{10^6}+\sqrt{10^6-1}}$$
$$=1+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10^6}+\sqrt{10^6-1}}\right)$$
$$=1+2[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{10^6}-\sqrt{10^6-1})]$$
$$=1+2(-1+\sqrt{10^6})=1999.$$

又知 $s>1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10^6-1}}>\frac{2}{\sqrt{2}+1}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{10^6}+\sqrt{10^6-1}}=2(-1+\sqrt{10^6})=1998$. 所以 $1998<s<1999$，$[s]=1998$，所以选 B.

5. B. 假设有三个不同的整数 x_1, x_2, x_3 满足 $|ax^2+bx+c|<50$.

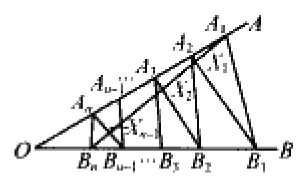
由鸽笼原理得 x_1, x_2, x_3 中必有两个同时大于（或同时小于）$-\frac{b}{2a}$，不妨设 $x_2>x_1\geqslant-\frac{b}{2a}$，

则 $a(x_1+x_2)+b \geqslant 2ax_1+a+b>a$.

故 $|(ax_2^2+bx_2+c)-(ax_1^2+bx_1+c)|=|(x_2-x_1)[a(x_1+x_2)+b]|\geqslant a>100$.

另一方面 $|(ax_2^2+bx_2+c)-(ax_1^2+bx_1+c)|\leqslant|ax_2^2+bx_2+c|+|ax_1^2+bx_1+c|\leqslant 50+50=100$，矛盾，故选 B.

6. B. 构造 $\angle AOB$，夹角 $\theta=\arccos\frac{\lambda}{2}\in[0,\pi]$.



如图，在射线 OA、OB 上依次取 n 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 及 $B_1, B_2, \cdots, B_n$，使 $OA_i=a_i$，$OB_i=b_i$. 由余弦定理，得 $N\geqslant M$，即

$A_2B_1+A_3B_2+\cdots+A_1B_n\geqslant A_1B_1+A_2B_2+\cdots+A_nB_n$.

设 A_1B_n 与 A_2B_1，A_3B_2，$\cdots$，A_nB_{n-1} 依次交于点 $X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}$，则由

$A_2B_1+A_3B_2+\cdots+A_1B_n=(A_1X_1+B_1X_1)+(A_2X_1+X_1X_2+X_2B_2)+\cdots+(A_nX_{n-1}+X_{n-1}B_n)\geqslant A_1B_1+A_2B_2+\cdots+A_nB_n$

知结论成立.

7. 比较：当 $a,b>0$，$a+b=1$ 时，$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant\frac{25}{4}$，

当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号.

可见，$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{4y}\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(2y+\frac{1}{2y}\right)\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{4}=\frac{25}{8}$，

当且仅当 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{4}$ 时取等号.

所以 $u_{\min}=\frac{25}{8}$.

8. 我们分两步来解. 第一步，估计出 n 的一个精确的下界.

由 $|x_i|<1$，$i=1,\cdots,n$，易知 $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|-\left|\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|<n$.

结合已知不等式，可得 $n>19$.

第二步，应该猜想到 n 的最小值为 20，我们构造实例以表明 $n=20$ 时问题有解. 取

$$x_i=\begin{cases}0.95 & (\text{当 } i \text{ 为奇数时}),\\ -0.95 & (\text{当 } i \text{ 为偶数时}).\end{cases}$$

这样的 $x_i(i=1,\cdots,20)$ 满足题设条件和已知不等式，从而 n 的最小值为 20.

9. 1，$\frac{3}{2}$.

令 $\frac{a}{b+c}=u^2$，$\frac{b}{c+a}=v^2$，$\frac{c}{a+b}=w^2$，设 $a+b+c=1$，则 $a=\frac{u^2}{1+u^2}$，$b=\frac{v^2}{1+v^2}$，$c=\frac{w^2}{1+w^2}$.

由此 $\frac{u^2}{1+u^2}+\frac{v^2}{1+v^2}+\frac{w^2}{1+w^2}=1$，

即 $(uv)^2+(vw)^2+(wu)^2+2(uv)(vw)(wu)=1$.

故可令 $uv=\cos C$，$vw=\cos A$，$wu=\cos B$，且 $\angle A+\angle B+\angle C=\pi$，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

于是，$S=\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}+\cos C\leqslant 2\sin\frac{C}{2}+\cos C=-2\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\leqslant\frac{3}{2}$.

当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

同理，$\cos A+\cos B+\cos C=2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}+\cos C=1+4\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\right)\geqslant 1$.

当 $a=0$ 时，等号成立.

10. 由 $\frac{1}{a_n}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}=2\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\right]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$，可知 $a_n=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$. 故

$$S_{2006}=\sum_{k=1}^{2006}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2006}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2}\times 2006+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2006}\right).$$

又 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2006}>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\underbrace{\left(\frac{1}{1024}+\frac{1}{1024}+\cdots+\frac{1}{1024}\right)}_{512\text{个}}+\underbrace{\left(\frac{1}{2048}+\frac{1}{2048}+\cdots+\frac{1}{2048}\right)}_{982\text{个}}>1+\frac{10}{2}=6$，

则 $S_{2006}>1003+3=1006$.

而 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2006}<1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+$
$\underbrace{\left(\frac{1}{512}+\frac{1}{512}+\cdots+\frac{1}{512}\right)}_{512个}+\underbrace{\left(\frac{1}{1024}+\frac{1}{1024}+\cdots+\frac{1}{1024}\right)}_{983个}<10+1=11$.

则 $S_{2006}<1003+5.5=1008.5$.

故 $1006<S_{2006}<1008.5$，即 1006 与 T_1 最接近.

11. 证明 因为 $x,y,z>0$，所以 $\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}=\frac{1}{z}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geqslant\frac{2}{z}$.

同理，$\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\geqslant\frac{2}{x}$，$\frac{z}{xy}+\frac{x}{yz}\geqslant\frac{2}{y}$.

以上三式相加，得 $\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

又 $x+y+z\geqslant xyz$，所以 $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\geqslant 1$.

从而 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)+2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)}\geqslant\sqrt{3\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)}\geqslant\sqrt{3}$.

故 $\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant\sqrt{3}$.

12. 令 $s=a+b+c$，$f(t)=\frac{(t+s)^2}{2t^2+(s-t)^2}$，$t\in(0,s)$.

因为 $f(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{4st+s^2}{3\left(t-\frac{s}{3}\right)^2+\frac{2}{3}s^2}\leqslant\frac{1}{3}+\frac{4st+s^2}{s^2}=4\left(\frac{1}{3}+\frac{t}{s}\right)$，

故 $f(a)+f(b)+f(c)\leqslant 4\left(\frac{1}{3}\times 3+\frac{a+b+c}{s}\right)=8$.

13. 当 $n=1$ 时，不等式显然成立.

当 $n\geqslant 2$ 时，设 $\begin{cases}nx+y+z=a,\\x+ny+z=b,\\x+y+nz=c,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=\frac{(n+1)a-b-c}{n(n+1)-2},\\y=\frac{(n+1)b-c-a}{n(n+1)-2},\\z=\frac{(n+1)c-a-b}{n(n+1)-2}.\end{cases}$

于是
$$\frac{x}{nx+y+z}+\frac{y}{x+ny+z}+\frac{z}{x+y+nz}$$
$$=\frac{1}{(n+2)(n-1)}\left[\frac{(n+1)a-b-c}{a}+\frac{(n+1)b-c-a}{b}+\frac{(n+1)c-a-b}{c}\right]$$
$$=\frac{1}{(n+2)(n-1)}\left[3(n+1)-\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)-\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)-\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\right]$$
$$\leqslant\frac{1}{(n+2)(n-1)}(3n+3-6)$$
$$=\frac{3(n-1)}{(n+2)(n-1)}=\frac{3}{n+2}.$$

14. 分析 面对这个高次数、大系数的不等式题，我们似乎难以入手. 如果想到导数知识，设 $y = x^4 - 12x^3 + 68x^2 - 192x + 207$，就会有 $y' = 4x^3 - 36x^2 + 136x - 192 = 4(x-3)[(x-3)^2 + 7]$，

由 $y'=0$，得 $x=3$. 据此可知，当 $x=3$ 时，函数 y 取得最小值. 这样，我们对函数解析式的变形就有了目标，即应先设法产生 $x-3$.

解 1 因 $y = (x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81) + 14(x^2 - 6x + 9) = (x-3)^4 + 14(x-3)^2 \geqslant 0$，所以原不等式成立.

这里的变形、重组后应用二项式定理较难实施，如果采用平移变换 $t=x-3$，那么就有更加简明的解法.

解 2 令 $t=x-3$，则 $x=t+3$，于是有

$y = (t+3)^4 - 12(t+3)^3 + 68(t+3)^2 - 192(t+3) + 207 = t^4 + 14t^2 \geqslant 0$.

故题给不等式成立.

15. $\dfrac{(x+y-z)^2}{(x+y)^2+z^2} = \dfrac{(x+y)^2 - 2(x+y)z + z^2}{(x+y)^2+z^2} = 1 - \dfrac{2(x+y)z}{(x+y)^2+z^2}$

易知(1)等价于下列不等式

$$\frac{(x+y)z}{(x+y)^2+z^2} + \frac{(y+z)x}{(y+z)^2+x^2} + \frac{(z+x)y}{(z+x)^2+y^2} \leqslant \frac{6}{5} \qquad (2)$$

不妨设 $x+y+z=1$，

注意到

$$\frac{(x+y)z}{(x+y)^2+z^2} = \frac{4(x+y)z}{3(x+y)^2+(x+y)^2+4z^2} \leqslant \frac{4(x+y)z}{3(x+y)+2\sqrt{(x+y)^2 \cdot 4z^2}} = \frac{4z}{3+4z}$$

可知(2)式左边 $\leqslant \dfrac{4z}{3+4z} + \dfrac{4x}{3+4x} + \dfrac{4y}{3+4y} = f$，

如能证明 $f \leqslant \dfrac{6}{5}$，则不等式(2)成立. 事实上，$f \leqslant \dfrac{6}{5} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3+z} + \dfrac{1}{3+x} + \dfrac{1}{3+y} \geqslant \dfrac{9}{10}$

而后一不等式是容易证明的(略，可用柯西不等式).

16. 注意到欲证不等式左边各项的形式相同，而右边为常数 2，我们可从局部入手，先设法证明 $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}} \geqslant \dfrac{2a}{a+b+c}$. 由 $(b+c-a)^2 \geqslant 0$，得 $(b+c)^2 + a^2 \geqslant 2a(b+c)$，

于是，$(a+b+c)^2 = (b+c)^2 + a^2 + 2a(b+c) \geqslant 4a(b+c)$.

从而 $\dfrac{1}{b+c} \geqslant \dfrac{4a}{(a+b+c)^2}$，即 $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}} \geqslant \dfrac{2a}{a+b+c}$.

同理，$\sqrt{\dfrac{b}{c+a}} \geqslant \dfrac{2b}{a+b+c}$，$\sqrt{\dfrac{c}{a+b}} \geqslant \dfrac{2c}{a+b+c}$.

以上三个不等式中的等号不能同时成立(否则，由 $b+c-a=c+a-b=a+b-c$，推得 $a=b=c=0$，矛盾).

以上三式相加，得 $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}} + \sqrt{\dfrac{b}{c+a}} + \sqrt{\dfrac{c}{a+b}} > 2$.

说明 以上证明中，我们主要应用了非负实数的性质.

17. 令 α，β 为不大于 1 的正数，则

$$\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\beta} = \frac{2+\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta} = 1 + \frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta} \leqslant 1 + \frac{1-\alpha\beta}{1+2\sqrt{\alpha\beta}+\alpha\beta} = \frac{2}{1+\sqrt{\alpha\beta}},$$

所以 $\frac{1}{\sqrt[n]{1+\alpha}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1+\beta}}$

$$=\sqrt[n]{\frac{1}{1+\alpha}}+\sqrt[n]{\frac{1}{1+\beta}}\leqslant 2\sqrt[n]{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\beta}\right)} \qquad (*)$$

$$\leqslant 2\sqrt[n]{\frac{1}{1+\sqrt{\alpha\beta}}}=\frac{2}{\sqrt[n]{1+\sqrt{\alpha\beta}}}$$

所以 $\frac{1}{\sqrt[n]{1+a}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1+b}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1+c}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1+\sqrt[3]{abc}}}$

$$\leqslant 2\left(\frac{1}{\sqrt[n]{1+\sqrt{ab}}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1+\sqrt{c\sqrt[3]{abc}}}}\right)$$

$$\leqslant \frac{4}{\sqrt[n]{1+\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}}}}=\frac{4}{\sqrt[n]{1+\sqrt[3]{abc}}}.$$

所以 $\frac{1}{\sqrt[n]{1+a}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1+b}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1+c}}\leqslant\frac{3}{\sqrt[n]{1+\sqrt[3]{abc}}}$

说明 1.(*)式应用了如下不等式

$x,y>0,\alpha\in(0,1)$ 时，$x^\alpha+y^\alpha\leqslant 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha$.

证 不妨设 $x\geqslant y$，令 $f(x)=x^\alpha+y^\alpha-2\left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha$，则

$f'(x)=\alpha\left[x^{\alpha-1}-\left(\frac{x+y}{2}\right)^{\alpha-1}\right]<0$，所以 $f(x)\leqslant f(y)=0$.

2. 所证不等式可推广为：$a_i>1(1\leqslant i\leqslant m)$，$m,n\in\mathbf{N}^*$，则 $\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\sqrt[n]{1+a_i}}\leqslant\frac{m}{\sqrt[n]{1+\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}}}$.

18. 这样的两个数存在.

不妨设 $x>y$，则原不等式变形为

$$\frac{x-y}{(x+1)(y+1)+xy}<2-\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{x(y+1)-y(x+1)}{(x+1)(y+1)+xy}<2-\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(1+\frac{1}{y}\right)-\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)+1}<2-\sqrt{3}.$$

令 $\alpha_i=\arctan\left(1+\frac{1}{a_i}\right)$，$i=1,2,3,4$. 由 $a_i>0$，知 $\alpha_i\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

将 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 分成三等份，由抽屉原理可知，在 $\alpha_i(i=1,2,3,4)$ 中至少有两个数之差的绝对值小于 $\frac{\pi}{12}$. 不妨设 $0<\alpha_j-\alpha_i<\frac{\pi}{12}$，则 $\tan(\alpha_j-\alpha_i)=\frac{\tan\alpha_j-\tan\alpha_i}{\tan\alpha_j\cdot\tan\alpha_i+1}<\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

取 $y=a_j$，$x=a_i$ 即可.

19. (1) 因 $m,n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n>m$，即 $n\geqslant m+1$，而

$$f(n)-f(m)=\underbrace{\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}}_{(共n-m项)} \quad ①$$

当 $n=m+1$ 时，显然 $f(n)-f(m)=f(n)-f(n-1)=\frac{1}{n}=\frac{(m+1)-m}{n}=\frac{n-m}{n}=\frac{1}{m+1}$，即原不等式取等号.

当 $n>m+1$ 时，由待证式右边的"向导"作用，启发我们想到将①式右边的分母统一为 n.

因为 $n>n-1>n-2>\cdots>m+2>m+1$.

所以 $\frac{1}{n}<\frac{1}{n-1}<\frac{1}{n-2}<\cdots<\frac{1}{m+2}<\frac{1}{m+1}$，

所以 $f(n)-f(m)=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}>\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}_{(共n-m项)}=\frac{n-m}{n}$.

综上知当 $n>m$ 时，$f(n)-f(m)\geqslant\frac{n-m}{n}$ 成立.

(2) 右边可改写为 $\frac{n+2}{2}=1+\frac{n}{2}=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{(共n项)}$ ②

而 $f(2^n)=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2^3}\right)+\cdots$

$+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$ ③

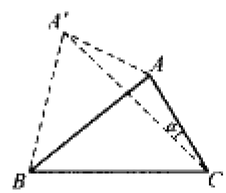
比较②和③，可将 $f(2^n)$ 的表达式分组分别缩小，即

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2^3}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$，……

$\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}>\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}$

将上述不等式相加，便可达到证明的目的.

20. 如图以 BC 为一边，在 A 点的同侧作 $\triangle A'BC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，则 $A'C=\frac{ab_1}{a_1}$. 不妨设 $\angle C\geqslant\angle C_1$，令 $\alpha=\angle C-\angle C_1$. 对 $\triangle AA'C$ 用余弦定理，得



$$AA'^2=b^2+\left(\frac{ab_1}{a_1}\right)^2-2b\cdot\frac{ab_1}{a_1}\cos\alpha\geqslant0,$$

即 $a_1{}^2b^2+a^2b_1{}^2-2aba_1b_1(\cos C\cos C_1+\sin C\sin C_1)\geqslant0$.

再将 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，$\cos C_1=\frac{a_1{}^2+b_1{}^2-c_1{}^2}{2a_1b_1}$，$ab\sin C=2\triangle$，$a_1b_1\sin C_1=2\triangle_1$

代入上式并化简，即得(1).

显然，当且仅当 A 与 A' 两点重合，即 $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$ 时等号成立.

21. 构造 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$，易知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数，所以对任意 $x\in(0,1)$，有 $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{1+x^2}-\frac{3}{10}\right)\geqslant0$，即 $\frac{x(3x-1)}{1+x^2}\geqslant\frac{3}{10}(3x-1)$.

分别令 $x=a,b,c$,代入上式,相加得

$$\frac{a(3a-1)}{1+a^2}+\frac{b(3b-1)}{1+b^2}+\frac{c(3c-1)}{1+c^2}\geqslant\frac{3}{10}[3(a+b+c)-3]=0.$$

22. 令 $a=\sin\alpha,b=\sin\beta,c=\sin\gamma$,则 $a,b,c\in(0,1)$ 且 $a^2+b^2+c^2=1$,

$$a-a^3=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2a^2(1-a^2)^2}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{\left(\frac{2a^2+1-a^2+1-a^2}{3}\right)^3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

同理,$b-b^3\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9}$,$c-c^3\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

故 $\frac{a^2}{1-a^2}+\frac{b^2}{1-b^2}+\frac{c^2}{1-c^2}=\frac{a^3}{a-a^3}+\frac{b^3}{b-b^3}+\frac{c^3}{c-c^3}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

注意到 $\tan^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{a^2}{1-a^2}$, $\tan^2\beta=\frac{\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta}=\frac{b^2}{1-b^2}$, $\tan^2\gamma=\frac{\sin^2\gamma}{1-\sin^2\gamma}=\frac{c^2}{1-c^2}$,

所以,$\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

注:易知上述不等式等号不能成立.

23. 证明:由题意可得 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$,且 $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以

$\sin^2\alpha=1-\sin^2\beta-\sin^2\gamma=\frac{1}{2}(\cos2\beta+\cos2\gamma)=\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)$.

因为 $\cos(\beta-\gamma)>\cos(\beta+\gamma)$,所以 $\sin^2\alpha>\cos^2(\beta+\gamma)=\sin^2\left[\frac{\pi}{2}-(\beta+\gamma)\right]$.

当 $\beta+\gamma\geqslant\frac{\pi}{2}$ 时,$\alpha+\beta+\gamma>\frac{\pi}{2}$.

当 $\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$ 时,$\alpha>\frac{\pi}{2}-(\beta+\gamma)$,同样有 $\alpha+\beta+\gamma>\frac{\pi}{2}$,故 $\alpha+\beta+\gamma>\frac{\pi}{2}$.

另一方面,不妨设 $\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma$,则 $\sin\alpha\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\sin\gamma\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$.

令 $\sin\alpha_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\sin\gamma_1=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\sin^2\beta}$,

则 $\sin^2\alpha_1+\sin^2\beta+\sin^2\gamma_1=1$.

$\sin^2\beta=\cos(\alpha+\gamma)\cos(\alpha-\gamma)=\cos(\alpha_1+\gamma_1)\cos(\alpha_1-\gamma_1)$.

因为 $\alpha_1-\gamma_1\leqslant\alpha-\gamma$,所以 $\cos(\alpha_1-\gamma_1)\geqslant\cos(\alpha-\gamma)$.

所以 $\cos(\alpha+\gamma)\geqslant\cos(\alpha_1+\gamma_1)$,所以 $\alpha+\gamma\leqslant\alpha_1-\gamma_1$.

如果运用调整法,只要 α,β,γ 不全相等,总可通过调整,使 $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1$ 增大.

所以,当 $\alpha=\beta=\gamma=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,$\alpha+\beta+\gamma$ 取最大值 $3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

综上可知,$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta+\gamma\leqslant3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

24. 因为函数 $z=t^m$(m 为大于 0 的常数)在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,则有

$$(x-y)(x^{m-3}-y^{m-3})\geqslant0,\quad(x-y)(x^{m-1}-y^{m-1})\geqslant0,$$

故 $2\left(\frac{x^{n+1}}{x+y^3}+\frac{y^{n+1}}{x^3+y}\right)-\left(\frac{x^n}{x+y^3}+\frac{y^n}{x^3+y}\right)$

$=\frac{2x^{n+1}-x^n(x+y)}{x+y^3}+\frac{2y^{n+1}-y^n(x+y)}{x^3+y}$

$=\frac{x^n(x-y)}{x+y^3}+\frac{y^n(y-x)}{x^3+y}$

$=\frac{x-y}{(x+y^3)(x^3+y)}[x^n(x^3+y)-y^n(x+y^3)]$

$=\frac{1}{(x+y^3)(x^3+y)}[(x-y)(x^{n+3}-y^{n+3})+xy(x-y)(x^{n-1}-y^{n-1})]$

$\geqslant 0$.

所以$\frac{x^{n+1}}{x+y^3}+\frac{y^{n+1}}{x^3+y}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x^n}{x+y^3}+\frac{y^n}{x^3+y}\right)\geqslant\frac{1}{2^2}\left(\frac{x^{n-1}}{x+y^3}+\frac{y^{n-1}}{x^3+y}\right)\geqslant\cdots$

$\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{x^2}{x+y^3}+\frac{y^2}{x^3+y}\right)$.

则$\frac{x^n}{x+y^3}+\frac{y^n}{x^3+y}\geqslant 2^{2-n}\left(\frac{x^2}{x+y^3}+\frac{y^2}{x^3+y}\right)$.

令 $t=xy$，则 $t\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，且 $x^4+y^4=1-4t+2t^2$，$x^5+y^5=1-5t+5t^2$. 于是，

$\frac{x^2}{x+y^3}+\frac{y^2}{x^3+y}\geqslant\frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow 5[x^2(x^3+y)+y^2(x+y^3)]\geqslant 4(x+y^3)(x^3+y)$

$\Leftrightarrow 5(x^5+y^5+t)\geqslant 4(x^4+y^4+t+t^3)$

$\Leftrightarrow 5(1-4t+5t^2)\geqslant 4(1-3t+2t^2+t^3)$

$\Leftrightarrow 4t^3-17t^2+8t-1\leqslant 0$

$\Leftrightarrow (4t-1)(t^2-4t+1)\leqslant 0$

$\Leftrightarrow (1-4t)[t^2+(1-4t)]\geqslant 0$.

由 $1-4t\geqslant 0$ 知最后这一不等式成立，从而，$\frac{x^2}{x+y^3}+\frac{y^2}{x^3+y}\geqslant\frac{4}{5}$.

综上所述，原不等式成立.

25. 对于任意一个大于 1 的奇数 $n=2k+1$，n 的任一表示中必包含一个"1". 去掉这个 1 就得到 $2k$ 的一个表示. 反之，给 $2k$ 的任一表示加上一个"1"就得到 $2k+1$ 的一个表示. 这显然是 $2k+1$ 和 $2k$ 的表示之间的一个一一对应. 从而有如下递归式：$f(2k+1)=f(2k)$. ①

对于任意正偶数 $n=2k$，其表示可以分为两类：包含若干个"1"的表示和不包含"1"的. 对于前者，去掉 1 个 1 就得到 $2k-1$ 的一个表示；对于后者，将每一项除以 2，就得到 k 的一个表示. 这两种变换都是可逆的，从而都是一一对应. 于是得到第二个递归式：$f(2k)=f(2k-1)+f(k)$. ②

①②式对于任意 $k\geqslant 1$ 都成立，显然 $f(1)=1$. 定义 $f(0)=1$，则①式对于 $k=0$ 也成立. 根据①②式，函数 f 是不减的.

由①式，可以将②式中的 $f(2k-1)$ 换成 $f(2k-2)$，得

$$f(2k)-f(2k-2)=f(k),k=1,2,3,\cdots$$

给定任一正整数 $n\geqslant 1$，将上式对 $k=1,2,\cdots,n$ 求和，得

$$f(2n)=f(0)+f(1)+\cdots+f(n),n=1,2,3,\cdots \qquad ③$$

下面先证明上界.

在③式中，右端所有的项都不大于最后一项. 对于 $n\geqslant 2$，$2=f(2)\leqslant f(n)$. 于是，有

$$f(2n)=2+(f(2)+\cdots+f(n))\leqslant 2+(n-1)f(n)\leqslant f(n)+(n-1)f(n)=nf(n),\ n=2,3,\cdots$$

进而得到

$$f(2^n)\leqslant 2^{n-1}\cdot f(2^{n-1})\leqslant 2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot f(2^{n-2})\leqslant 2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot 2^{n-3}\cdot f(2^{n-3})\leqslant\cdots$$
$$\leqslant 2^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}\cdot f(2)=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot 2.$$

因为当 $n\geqslant 3$ 时，有 $2^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot 2<2^{\frac{n^2}{2}}$，上界得证.

为了证明下界，先证明对于具有相同奇偶性的正整数 $b\geqslant a\geqslant 0$，有如下不等式成立：

$$f(b+1)-f(b)\geqslant f(a+1)-f(a). \qquad ④$$

事实上，如果 a、b 同为偶数，则由①式知上式两端均等于 0. 而当 a、b 同为奇数时，由②式知

$$f(b+1)-f(b)=f\left(\frac{b+1}{2}\right),f(a+1)-f(a)=f\left(\frac{a+1}{2}\right)$$

由函数 f 是不减的即得不等式④成立.

任取正整数 $r\geqslant k\geqslant 1$，其中 r 为偶数，在④式中依次令 $a=r-j$，$b=r+j$，$j=0,1,\cdots,k-1$. 然后将这些不等式加起来，得 $f(r+k)-f(r)\geqslant f(r+1)-f(r-k+1)$.

因为 r 是偶数，所以 $f(r+1)=f(r)$. 从而 $f(r+k)+f(r-k+1)\geqslant 2f(r)$，$k=1,2,\cdots,r$.

对于 $k=1,2,\cdots,r$，将上述不等式相加，即得 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2r)\geqslant 2rf(r)$.

根据③式，上式左端等于 $f(4r)-1$. 从而对于任意偶数 $r\geqslant 2$，$f(4r)\geqslant 2rf(r)+1\geqslant 2rf(r)$.

取 $r=2^{m-2}$，即得 $f(2^m)\geqslant 2^{m-1}f(2^{m-2})$. ⑤

要使 $r=2^{m-2}$ 为偶数，m 须为大于 2 的整数，但是⑤式对于 $m=2$ 也成立.

令 n 为大于 1 的整数. 如果 l 是一个满足 $2l\leqslant n$ 的整数，则对 $m=n,n-1,\cdots,n-2l+2$ 应用不等于⑤，得

$$f(2^n)\geqslant 2^{n-1}\cdot f(2^{n-2})\geqslant 2^{n-1}\cdot 2^{n-3}\cdot f(2^{n-4})$$
$$\geqslant 2^{n-1}\cdot 2^{n-3}\cdot 2^{n-5}\cdot f(2^{n-6})\geqslant\cdots\geqslant 2^{(n-1)+(n-3)+\cdots+(n-2l+1)}\cdot f(2^{n-2l})$$
$$=2^{l(n-l)}\cdot f(2^{n-2l}).$$

如果 n 是偶数，取 $l=\frac{n}{2}$；如果 n 是奇数，取 $l=\frac{n-1}{2}$. 于是，得 $f(2^n)\geqslant 2^{\frac{n^2}{4}}\cdot f(2^0)=2^{\frac{n^2}{4}}$，当 n 为偶数时；$f(2^n)\geqslant 2^{\frac{n^2-1}{4}}\cdot f(2^1)=2^{\frac{n^2-1}{4}}\cdot 2>2^{\frac{n^2}{4}}$，当 n 为奇数时. 因此，对于 $n\geqslant 2$ 下界成立.

同步检测 4－1

1. C **2.** B **3.** C **4.** B

5. 解法 1 因为 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，且 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=1$.

所以 $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=\left(x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\right)$

$$=3+\left(\frac{y}{2x}+\frac{2x}{y}\right)+\left(\frac{z}{3x}+\frac{3x}{z}\right)+\left(\frac{2z}{3y}+\frac{3y}{2z}\right)\geqslant 3+2+2+2=9,$$

当且仅当 $x=3$，$y=6$，$z=9$ 时取等号.

故选 D.

解法 2 $\left(x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\right)\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{x\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{z}{3}}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{y}\cdot\frac{3}{z}}=9$

所以 $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}\geqslant 9$，下略.

6. 解法 1 设 $\sin\theta=p$，$\cos\theta=q$.

因为 $\frac{p+q}{2}\geqslant\sqrt{pq}$，而 $f(x)$ 是减函数，所以 $f\left(\frac{p+q}{2}\right)\leqslant f(\sqrt{pq})$，即 $a\leqslant b$.

因为 $\sqrt{pq}\leqslant\frac{p+q}{2}$，所以 $pq\leqslant\frac{(p+q)\sqrt{pq}}{2}$，$\frac{2pq}{p+q}\leqslant\sqrt{pq}$.

所以 $f\left(\frac{2pq}{p+q}\right)\geqslant f(\sqrt{pq})$，即 $c\geqslant b$，故 $a\leqslant b\leqslant c$.

选 D.

解法 2 由题意，令 $\theta=\frac{\pi}{6}$，

则 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$，

$\sqrt{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$，$\frac{\sin2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

因为 $\sin\theta=\frac{1}{2}\in(0,1)$，所以 $f(x)$ 是减函数，

又 $\frac{1+\sqrt{3}}{4}>\frac{\sqrt[4]{3}}{2}>\frac{3-\sqrt{3}}{2}$，所以 $f\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}\right)<f(\sqrt{\sin\theta\cos\theta})<f\left(\frac{\sin2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)$

即 $a<b<c$.

故选 D.

说明 这是一个比较函数值大小的问题，通常利用函数的单调性. 若函数 $f(x)$ 单调递增(减)，则当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$($f(x_1)>f(x_2)$)；当 $x_1>x_2$ 时，$f(x_1)>f(x_2)$($f(x_1)<f(x_2)$). 因此解决问题的关键有两个：一是确定函数的单调性，二是确定自变量的大小关系. 解法 1 就是这样解决问题的.

因为正确答案应对一切 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 都正确，故又可以运用特殊值法. 对 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内的某个角不正确的选择支都是错误的，由正确选择支的唯一性，也可选出正确答案. 解法 2 便是取特殊值 $\theta=\frac{\pi}{6}$，排除了 A、B、C 而选 D.

当然，此题也可用作差比较法来解：因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\theta\in(0,1)$，所以 $f(x)$ 是单调减函数，

$$\sin\theta>0,\cos\theta>0.$$

所以 $a-b=\log_{\sin\theta}\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}-\log_{\sin\theta}\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\log_{\sin\theta}\frac{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}}{\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta}}\leqslant\log_{\sin\theta}1=0$，

所以　$a \leqslant b$.

又 $b-c=\log_{\sin\theta}\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta}-\log_{\sin\theta}\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\log_{\sin\theta}\dfrac{\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta}}{\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}}=\log_{\sin\theta}\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{2\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}$

$\leqslant \log_{\sin\theta}1=0$，即　$b \leqslant c$，所以　$a \leqslant b \leqslant c$.

选 D.

7. $6=x+2y+3z \geqslant 3\cdot\sqrt[3]{x\cdot 2y\cdot 3z}$，得 $xyz \leqslant \dfrac{4}{3}$，故 xyz 的最大值为 $\dfrac{4}{3}$.

8. 因为 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，$x+y+z=1$，

所以 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}=(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}\right)$

$$=\frac{y+z}{x}+\frac{4z+4x}{y}+\frac{9x+9y}{z}+14$$

$$=\left(\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)+\left(\frac{4z}{y}+\frac{9y}{z}\right)+\left(\frac{9x}{z}+\frac{z}{x}\right)+14$$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}+2\sqrt{\frac{4z}{y}\cdot\frac{9y}{z}}+2\sqrt{\frac{9x}{z}\cdot\frac{z}{x}}+14$$

$$=4+12+6+14=36,$$

故当 $x=\dfrac{1}{6}$，$y=\dfrac{1}{3}$，$z=\dfrac{1}{2}$ 时，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}$ 的最小值是 36.

说明　条件的巧妙介入，使得活用二元均值不等式成为可能.

9. 通过换元"消失"三角函数.

令　$\sin\dfrac{\theta}{2}=x$，$x\in(0,1)$，则 $y=2\sin\dfrac{\theta}{2}\left(1-\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)=2x(1-x^2)$，

变形得　$1=x^2+\dfrac{y}{2x}=x^2+\dfrac{y}{4x}+\dfrac{y}{4x}\geqslant 3\sqrt[3]{x^2\cdot\dfrac{y}{4x}\cdot\dfrac{y}{4x}}=3\sqrt[3]{\dfrac{y^2}{16}}$，

所以 $y^2\leqslant\dfrac{16}{27}$，即当 $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$y_{\max}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

需要指出的是，利用均值不等式求最值时，必须注意：

(1) 各项或各因式的值非负；

(2) 和或积是常数；

(3) 各项或各因式可取得相等的值.

必要时应作适当的变形，以满足上述前提.

10. 因为 $a=x_1+x_2+x_3\geqslant 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}=3\sqrt[3]{a}$，所以，$a\geqslant 3\sqrt{3}$.

又 $3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\leqslant(x_1+x_2+x_3)^2$，有 $3ab\leqslant a^2$，即 $3b\leqslant a$.

则 $P=\dfrac{a^2+6b+1}{a^2+a}\leqslant\dfrac{a^2+2a+1}{a^2+a}=1+\dfrac{1}{a}\leqslant 1+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}=\dfrac{9+\sqrt{3}}{9}$.　①

当 $x_1=x_2=x_3$，$a=3\sqrt{3}$，$3b=a$，即 $x_1=x_2=x_3=\sqrt{3}$，$a=3\sqrt{3}$，$b=\sqrt{3}$ 时，式 ① 等号成立.

故 P 的最大值为 $\dfrac{9+\sqrt{3}}{9}$.

11. 不等式 $ab > 2007a + 2008b$ 两边分别乘以 $\frac{a+b}{ab}$，得 $a+b > \frac{2007(a+b)}{b} + \frac{2008(a+b)}{a}$。

于是 $\frac{2007(a+b)}{b} + \frac{2008(a+b)}{a} = 2007 + \frac{2007a}{b} + \frac{2008b}{a} + 2008 \geqslant 2007 + 2\sqrt{2007 \times 2008} + 2008$
$= (\sqrt{2007} + \sqrt{2008})^2$.

12. 观察三个无理根式的分子和分母，分母的和为分子的和的 2 倍，于是想到

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}} \cdot 1 \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a} + 1\right) = \frac{a+b+c}{2a},$$

即 $\sqrt{\frac{a}{b+c}} \cdot 1 \geqslant \frac{2a}{a+b+c}$，同理有 $\sqrt{\frac{b}{c+a}} \cdot 1 \geqslant \frac{2b}{a+b+c}$；$\sqrt{\frac{c}{a+b}} \cdot 1 \geqslant \frac{2c}{a+b+c}$，

三式相加 $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geqslant 2$.

等号成立的条件是 $\sqrt{\frac{a}{b+c}} = 1$，$\sqrt{\frac{b}{c+a}} = 1$，$\sqrt{\frac{c}{a+b}} = 1$，这三式同时成立，即 $b = a+c$，$c = a+b$，$a = b+c$，于是 $a+b+c = 0$，与题设矛盾.

所以 $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.

13. 由条件可知 $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$，$a+b+c = 2$. 于是

$$0 \leqslant (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant \left(\frac{1-a+1-b+1-c}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

所以，$0 \leqslant 1 - a - b - c + ab + bc + ca - abc \leqslant \frac{1}{27}$. 从而，再结合 $a+b+c = 2$，可知

$$1 \leqslant ab + bc + ca - abc \leqslant \frac{28}{27}.$$

两个不等式全部获证.

14. 由均值不等式可知对任何自然数 n，成立 $n\sqrt{n+1} < \frac{1}{2}(n^2+n+1)$

$$\begin{aligned}
\text{于是}\quad \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k+1} &< \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) + n\right] \\
&= \frac{1}{6}n(n^2+3n+5) < \frac{1}{6}n(n+2)^2, (n \geqslant 2).
\end{aligned}$$

类似地，我们可以证明，当 $n \in \mathbf{N}$ 时，成立 $1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \cdots + n\sqrt{n} < \frac{1}{6}(n+1)^3$.

15. 因为 $x^3 + y^3 \geqslant x^2y + xy^2$，所以 $x^3 + y^3 + x^2z + y^2z \geqslant x^2y + xy^2 + x^2z + y^2z$，

即 $\quad x^2(x+z) + y^2(y+z) \geqslant x^2(y+z) + y^2(z+x)$，

所以 $\quad \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} \geqslant \frac{x^2}{z+x} + \frac{y^2}{y+z}$，

同理 $\quad \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{y^2}{x+y} + \frac{z^2}{z+x}$，

相加得 $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}\right)$.

又因为 $\frac{x^2+y^2}{x+y}\geqslant\frac{x+y}{2}$, $\frac{y^2+z^2}{y+z}\geqslant\frac{y+z}{2}$, $\frac{z^2+x^2}{z+x}\geqslant\frac{z+x}{2}$,

相加得 $\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}\right)\geqslant\frac{x+y+z}{2}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}$.

16. 若设甲、乙两名中学生这三次推销玩具足球的单价分别为 x、y、z 元/只，则

甲卖出的足球平均每只得款(单位：元)为 $\frac{1000x+1000y+1000z}{3000}=\frac{1}{3}(x+y+z)$，

乙卖出的足球平均每只得款(单位：元)为 $\frac{1000+1000+1000}{\frac{1000}{x}+\frac{1000}{y}+\frac{1000}{z}}=\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$.

因为 $x>0,y>0,z>0$,

所以 $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqslant3\cdot\sqrt[3]{xyz}\cdot3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}=9$,

即有 $\frac{1}{3}(x+y+z)\geqslant\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$,

当且仅当 $x=y=z$ 时等号成立.

故当玩具足球的价格都相同时，两位中学生推销效果相同，当玩具足球的价格不同时，中学生甲推销效果较好.

17. 所证不等式等价于 $x^2+y^2+z^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{xyz}\geqslant\frac{1}{2}(x+y+z)^2$.

即证：$2(xy+yz+zx)-(x^2+y^2+z^2)\leqslant\sqrt{3}\sqrt{xyz}$.

又因为 $2(xy+yz+zx)-(x^2+y^2+z^2)$

$=2(xy+yz+xz)(x+y+z)-(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)$

$=-x^3-y^3-z^3+x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+6xyz$

$=-[x^3+y^3+z^3-x^2(y+z)-y^2(z+x)-z^2(x+y)+3xyz]+9xyz$

$\leqslant9xyz$.

又知 $xyz\leqslant\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$,

于是 $2(xy+yz+zx)-(x^2+y^2+z^2)\leqslant9xyz=9\sqrt{xyz}\cdot\sqrt{xyz}\leqslant9\sqrt{\frac{1}{27}}\sqrt{xyz}=\sqrt{3}\sqrt{xyz}$.

18. 因为 $a^2+ab+b^2\geqslant3ab$，所以，

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}=\frac{a^3+a^2b+ab^2-(a^2b+ab^2)}{a^2+ab+b^2}=a-\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}\geqslant a-\frac{a+b}{3}. \quad ①$$

同理，$\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}\geqslant b-\frac{b+c}{3}$, ②

$\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant c-\frac{c+a}{3}$. ③

①＋②＋③，得

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant(a+b+c)-\frac{2(a+b+c)}{3}=\frac{a+b+c}{3}.$$

19. 证明：由三元均值不等式，有

$$2a(b+c)^2=2a(b+c)(b+c)\leqslant\left[\frac{2a+(b+c)+(b+c)}{3}\right]^3=\frac{8(a+b+c)^3}{27}.$$

则 $\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}\geqslant\sqrt[3]{\frac{27a^3}{4(a+b+c)^3}}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{a}{a+b+c}.$

同理，$\sqrt[3]{\left(\frac{b}{c+a}\right)^2}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{b}{a+b+c}$；$\sqrt[3]{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{c}{a+b+c}.$

三式相加，即得证式.

20. **证法1** （待定系数法）由 $\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}=2$，得 $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}=1$，

所以 $2+k=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}+k\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\right)=\left(\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{k}{1+x^2}\right)+\left(\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{k}{1+y^2}\right)+\left(\frac{z^2}{1+z^2}+\frac{k}{1+z^2}\right)\geqslant2\sqrt{k}\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\right)$

等号成立的条件是 $x^2=y^2=z^2=k$，把 $x^2=y^2=z^2=k$ 代入条件式，得 $k=2$，

即 $\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\leqslant\frac{k+2}{2\sqrt{k}}=\sqrt{2}.$

故原不等式成立.

证法2 因为 $\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{2}{1+x^2}\geqslant2\sqrt{\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}}=2\sqrt{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}$；

同理

$\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{2}{1+y^2}\geqslant2\sqrt{2}\cdot\frac{y}{1+y^2}$；$\frac{z^2}{1+z^2}+\frac{2}{1+z^2}\geqslant2\sqrt{2}\cdot\frac{z}{1+z^2}.$

三式相加得

$$\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}+2\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\right)\geqslant2\sqrt{2}\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\right),$$

即 $2+2\times1\geqslant2\sqrt{2}\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\right).$

故 $\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\leqslant\sqrt{2}.$

证法3 由已知，易得 $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}=1.$

构造空间向量

$$\boldsymbol{a}=\left(\sqrt{\frac{1}{1+x^2}},\sqrt{\frac{1}{1+y^2}},\sqrt{\frac{1}{1+z^2}}\right),\ \boldsymbol{b}=\left(\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}},\sqrt{\frac{y^2}{1+y^2}},\sqrt{\frac{z^2}{1+z^2}}\right),$$

因为 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，所以 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2\leqslant|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$. 因为 $\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{1}{1+y^2}}\sqrt{\frac{y^2}{1+y^2}}+\sqrt{\frac{1}{1+z^2}}\sqrt{\frac{z^2}{1+z^2}}\right)^2\leqslant$

$$\left[\left(\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{1+y^2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{1+z^2}}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{y^2}{1+y^2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{z^2}{1+z^2}}\right)^2\right]=$$

$1\times 2=2$，所以 $\quad \frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\leqslant\sqrt{2}$.

21. (1) 因为 x、y、z 均为正数，所以 $\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}=\frac{1}{z}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geqslant\frac{2}{z}$.

同理可得 $\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\geqslant\frac{2}{x}$，$\frac{z}{xy}+\frac{x}{yz}\geqslant\frac{2}{y}$.

当且仅当 $x=y=z$ 时，以上三式等号都成立.

将上述三个不等式两边分别相加，并除以 2，得 $\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

(2) 因为 x、y、z 均为正数，且 $x+y+z\geqslant xyz$，所以 $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\geqslant 1$.

由(1)的结论，得

$$u=\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)}$$

$$\geqslant\sqrt{3\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)}\geqslant\sqrt{3}.$$

当且仅当 $x=y=z$，且 $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1$，即 $x=y=z=\sqrt{3}$ 时，以上等号都成立. 故 $u_{\min}=\sqrt{3}$.

22. $\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}=\sqrt{\frac{ab}{1-a-b+ab}}=\sqrt{\frac{ab}{(1-a)(1-b)}}$ 是 $\frac{a}{1-b}$ 和 $\frac{b}{1-a}$ 的几何平均值. 由算术—几何不等式得 $\quad\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a}{1-b}+\frac{b}{1-a}\right)$,

类似可得 $\quad\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{c}{1-a}+\frac{a}{1-c}\right)$.

所以
$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{1-b}+\frac{b}{1-a}+\frac{b}{1-c}+\frac{c}{1-b}+\frac{c}{1-a}+\frac{a}{1-c}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a+c}{1-b}+\frac{b+c}{1-a}+\frac{b+a}{1-c}\right)=\frac{1}{2}(1+1+1)=\frac{3}{2}.$$

23. 证明 注意到 $b^3+bc^2+c^3+b^2c\geqslant 2\sqrt{b^3\cdot bc^2}+2\sqrt{c^3\cdot b^2c}=2b^2c+2bc^2$.

则 $b^3+c^3\geqslant b^2c+bc^2$，故 $a^3+(\sqrt{2}b)^3\geqslant a^2\cdot\sqrt{2}b+a(\sqrt{2}b)^2$，即 $\sqrt{2}a^3+4b^3\geqslant 2a^2b+2\sqrt{2}ab^2$.

同理，$\sqrt{2}a^3+4c^3\geqslant 2a^2c+2\sqrt{2}ac^2$.

综上可得 $2\sqrt{2}a^3+7b^3+7c^3\geqslant 2a^2(b+c)+2\sqrt{2}(b^2a+c^2a)+3(b^2c+c^2b)$. ①

由 $a^2=b^2+c^2\geqslant\frac{1}{2}(b+c)^2$，得 $a\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}(b+c)$.

则 $(5-\sqrt{2})a^3\geqslant(4-\sqrt{2})a^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(b+c)+a^3=(2\sqrt{2}-1)a^2(b+c)+b^2a+c^2a$. ②

注意到 $a^3\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}a^2(b+c)=\frac{1}{\sqrt{2}}(b^2+c^2)(b+c)\geqslant\sqrt{2}bc(b+c)=\sqrt{2}(b^2c+c^2b)$.

则 $(2-\sqrt{2})a^3\geqslant(2\sqrt{2}-2)(b^2c+c^2b)$. ③

将式①、②、③相加，整理即得

$$a^3+b^3+c^3\geqslant\frac{2\sqrt{2}+1}{7}[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)].$$

易知，当且仅当 $a=\sqrt{2}b=\sqrt{2}c$ 时，上式等号成立.

24. $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=p\Rightarrow\left(\sqrt{\frac{q}{p}}a_1\right)^2+\left(\sqrt{\frac{q}{p}}a_2\right)^2+\cdots+\left(\sqrt{\frac{q}{p}}a_n\right)^2=q.$

所以 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

$$=\sqrt{\frac{p}{q}}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}a_1\cdot b_1+\sqrt{\frac{q}{p}}a_2\cdot b_2+\cdots+\sqrt{\frac{q}{p}}a_n\cdot b_n\right)$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{p}{q}}\left[\frac{\left(\sqrt{\frac{q}{p}}a_1\right)^2+b_1^2}{2}+\frac{\left(\sqrt{\frac{q}{p}}a_2\right)^2+b_2^2}{2}+\cdots+\frac{\left(\sqrt{\frac{q}{p}}a_n\right)^2+b_n^2}{2}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{p}{q}}\left[\frac{\frac{q}{p}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}{2}+\frac{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}{2}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{p}{q}}\left(\frac{\frac{q}{p}\cdot p}{2}+\frac{q}{2}\right)=\sqrt{pq}.$$

当且仅当 $\sqrt{\frac{q}{p}}a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 时取等号，所以 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)_{\max}=\sqrt{pq}$.

说明 本结论实际就是由著名的柯西不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

$\left(\text{当且仅当}\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}\text{时取等号}\right)$直接得到的一个推论.

25. 证明 取正参数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，有 $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n=(\lambda_1a_1)\left(\frac{1}{\lambda_1}a_2\right)+(\lambda_2a_2)\left(\frac{1}{\lambda_2}a_3\right)+\cdots+(\lambda_{n-1}a_{n-1})\left(\frac{1}{\lambda_{n-1}}a_n\right)\leqslant\frac{1}{2}\left[\lambda_1^2a_1^2+\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\lambda_2^2\right)a_2^2+\cdots+\left(\frac{1}{\lambda_{n-2}^2}+\lambda_{n-1}^2\right)a_{n-1}^2+\frac{1}{\lambda_{n-1}^2}a_n^2\right]$，令 $\lambda_1^2=\frac{1}{\lambda_1^2}+\lambda_2^2=\cdots=\frac{1}{\lambda_{n-2}^2}+\lambda_{n-1}^2=\frac{1}{\lambda_{n-1}^2}$ ①，因求最大值，故还必须有 $\lambda_1a_1=\frac{1}{\lambda_1}a_2,\lambda_2a_2=\frac{1}{\lambda_2}a_3,\cdots,\lambda_{n-1}a_{n-1}=\frac{1}{\lambda_{n-1}}a_n$，

此即 $\lambda_1^2=\frac{a_2}{a_1},\lambda_2^2=\frac{a_3}{a_2},\cdots,\lambda_{n-1}^2=\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

将上式代入①，得 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1+a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_{n-2}+a_n}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}}{a_n}$. ②

令 $\lambda_1^2=r$，则 $a_2=ra_1,a_1+a_3=ra_2,\cdots,a_{n-2}+a_n=ra_{n-1},a_{n-1}=ra_n$.

观察②的形式，考虑作代换 $r=q+\frac{1}{q}(q\in\mathbf{C},r\in\mathbf{R}^*)$.

因为 $a_{k-2}+a_k=ra_{k-1}=\left(q+\frac{1}{q}\right)a_{k-1}$.

所以 $a_k - qa_{k-1} = \frac{1}{q}(a_{k-1} - qa_{k-2})(3 \leqslant k \leqslant n)$，

故数列$\{a_k - qa_{k-1}\}$是公比为$\frac{1}{q}$的等比数列，

所以 $a_k - qa_{k-1} = \frac{1}{q^{k-2}}(a_2 - qa_1) = \frac{1}{q^{k-2}}\left[\left(q+\frac{1}{q}\right)a_1 - qa_1\right] = \frac{a_1}{q^{k-1}}$.

于是 $q^{k-1}a_k - q^k a_{k-1} = a_1$. ③

再令 $b_k = q^{k-1}a_k$，则 ③ 为 $b_k = q^2 b_{k-1} + b_1$（注意 $b_1 = a_1$），上式变形为

$$b_k - \frac{b_1}{1-q^2} = q^2\left(b_{k-1} - \frac{b_1}{1-q^2}\right).$$

这样，又得到一个公比为 q^2 的等比数列$\left\{b_k - \frac{b_1}{1-q^2}\right\}$，

所以 $b_k - \frac{b_1}{1-q^2} = \left(b_1 - \frac{b_1}{1-q^2}\right)q^{2(k-1)}$，即 $b_k = \frac{1-q^{2k}}{1-q^2}b_1 = \frac{1-q^{2k}}{1-q^2}a_1$，

所以 $a_k = \frac{b_k}{q^{k-1}} = \frac{(1-q^{2k})a_1}{q^{k-1}(1-q^2)}$，故有 $a_{n-1} = \frac{(1-q^{2n-2})a_1}{q^{n-2}(1-q^2)}$，$a_n = \frac{(1-q^{2n})a_1}{q^{n-1}(1-q^2)}$.

而 $a_{n-1} = ra_n = \left(q+\frac{1}{q}\right)a_n$，

故有 $\frac{(1-q^{2n-2})a_1}{q^{n-2}(1-q^2)} = \left(q+\frac{1}{q}\right)\frac{(1-q^{2n})a_1}{q^{n-1}(1-q^2)}$，

整理得 $q^2(1-q^{2n-2}) = (1-q^{2n})(q^2+1)$，化简得 $q^{2n+2} = 1$.

所以 $q = \cos\frac{m\pi}{n+1} + i\sin\frac{m\pi}{n+1}(m \in \mathbf{Z}, 0 \leqslant m \leqslant 2n+1)$.

因为 f_n 的最大值唯一，所以应能求出 m 的一个确定的值，对于这个 m 的值，我们有

$$(f_n)_{\max} = \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{2}(q+\bar{q}) = \cos\frac{m\pi}{n+1}.$$

因为 $f_n < \frac{a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n+a_na_1}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

$= [2(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n+a_na_1)] \div [(a_1^2+a_2^2)+(a_2^2+a_3^2)+\cdots+(a_{n-1}^2+a_n^2)+(a_n^2+a_1^2)]$

$\leqslant \frac{2(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n+a_na_1)}{2(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n+a_na_1)} = 1$，

所以$(f_n)_{\max} < 1$，从而 $m \neq 0$. 又因为 ① 和 ② 是 f_n 取最大值的充要条件，由 ①② 可推得

$$a_k = \frac{(1-q^{2k})a_1}{q^{k-1}(1-q^2)}. \quad ③$$

将 $q = \cos\frac{m\pi}{n+1} + i\sin\frac{m\pi}{n+1}$ 代入 ③，化简得 $a_k = \frac{\sin\frac{km\pi}{n+1}}{\sin\frac{m\pi}{n+1}}a_1$，

因为对任意 $1 \leqslant k \leqslant n, k \in \mathbf{Z}$，都有 $a_k > 0$，所以应取 $m = 1$.

至此，已推知 $(f_n)_{\max} = \cos\frac{\pi}{n+1}$.

同步检测 4－2

1. B　2. B　3. B　4. C　5. D　6. C

7. 原式 $= x_1x_2x_3(x_2+x_3) = \frac{1}{12}(3x_1)(2x_2)(2x_3)(x_2+x_3)$

$$\leqslant \frac{1}{12}\cdot\left[\frac{3(x_1+x_2+x_3)}{4}\right]^4 = \frac{27}{1024}.$$

当 $x_1=\frac{1}{4}$，$x_2=x_3=\frac{3}{8}$ 时取最大值 $\frac{27}{1024}$.

8. 由已知有 $y=x-1$，代入得

$$k=\frac{1}{(x-1)^3}+x+1=\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{x-1}{3}+\frac{x-1}{3}+\frac{x-1}{3}+2$$

$$\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{1}{(x-1)^3}\cdot\left(\frac{x-1}{3}\right)^3}+2=\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}+2.$$

当 $\frac{1}{(x-1)^3}=\frac{x-1}{3}$，即 $x=1+\sqrt[4]{3}$ 时，k 取最小值 $\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}+2$.

9. $2\sqrt{\left(\frac{24}{7}\right)^7}$. 因 $f(x)=\underbrace{(x+1)^2+\cdots+(x+1)^2}_{5}+\frac{a}{2(x+1)^5}+\frac{a}{2(x+1)^5}\geqslant 7\cdot\sqrt[7]{\frac{a^2}{4}}$（当且仅当 $(x+1)^2=\frac{a}{2(x+1)^5}$ 时，等号成立）.

于是 $7\cdot\sqrt[7]{\frac{a^2}{4}}\geqslant 24 \Rightarrow a\geqslant 2\sqrt{\left(\frac{24}{7}\right)^7}$.

另一方面，$a=2\sqrt{\left(\frac{24}{7}\right)^7}$ 时，$x=\sqrt{\frac{24}{7}}-1$，$f(x)=24$.

10. $\frac{x^4}{(y-1)^2}+16(y-1)+16(y-1)+16\geqslant 4\sqrt[4]{16^4x^4}=32x$，

即 $\frac{x^4}{(y-1)^2}\geqslant 32(x-y)+16$.

同理，$\frac{y^4}{(z-1)^2}\geqslant 32(y-z)+16$；$\frac{z^4}{(x-1)^2}\geqslant 32(z-x)+16$.

三式相加，可得 $\frac{x^4}{(y-1)^2}+\frac{y^4}{(z-1)^2}+\frac{z^4}{(x-1)^2}\geqslant 48$.

易知当且仅当 $x=y=z=2$ 时等号成立.

11. 由平均值不等式，有 $\sqrt[n]{n+1}-1=\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{1}}-1$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}+\frac{n}{n-1}+\cdots+\frac{2}{1}\right)-1$$

$$=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{n+1}{n}-1\right)+\left(\frac{n}{n-1}-1\right)+\cdots+\left(\frac{2}{1}-1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}+1\right).$$

12. 设 $x=b+2c+3d$，$y=c+2d+3a$，

$z=d+2a+3b$，$w=a+2b+3c$，

则 $a=\frac{1}{24}(7y+z+w-5x)$，$b=\frac{1}{24}(7z+x+w-5y)$，

$c=\frac{1}{24}(7w+x+y-5z)$，$d=\frac{1}{24}(7x+y+z-5w)$，

所以原不等式左边 $=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}+\frac{d}{w}$

$$=\frac{7}{24}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{w}{z}+\frac{x}{w}\right)+\frac{1}{24}\left(\frac{z}{x}+\frac{w}{x}+\frac{x}{y}+\frac{w}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+\frac{y}{w}+\frac{z}{w}\right)-\frac{20}{24}$$

$$\geqslant\frac{7}{24}\times4\sqrt[4]{\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{w}{z}\cdot\frac{x}{w}}+\frac{8}{24}\sqrt[8]{\frac{z}{x}\cdot\frac{w}{x}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{w}{y}\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{y}{w}\cdot\frac{z}{w}}-\frac{20}{24}$$

$$=\frac{2}{3}.$$

故原不等式成立.

13. 由条件可知对任意 $n\geqslant1$，$a_n>0$.

$$a_{n+1}=\frac{a_n^4+1}{5a_n}=\frac{a_n^3}{5}+\frac{1}{15a_n}+\frac{1}{15a_n}+\frac{1}{15a_n}\geqslant4\sqrt[4]{\frac{1}{5\times15^3}}>\frac{1}{5}.$$

另一方面，当 $n=2$ 时，$a_2=\frac{17}{10}<2$.

设 $n=k$ 时，有 $a_k<2$. 若 $1\leqslant a_k<2$，则 $a_{k+1}=\frac{a_k^3}{5}+\frac{1}{5a_k}<\frac{8}{5}+\frac{1}{5\times1}<2$；若 $\frac{1}{5}<a_k<1$，则 $a_{k+1}=\frac{a_k^3}{5}+\frac{1}{5a_k}<\frac{1}{5}+\frac{1}{5\times\frac{1}{5}}<2$. 所以总有 $a_{k+1}<2$.

因而对 $n>1$，均有 $\frac{1}{5}<a_n<2$.

14. (1) $n^iA_m^i<m^iA_n^i$

$\Leftrightarrow n^im(m-1)(m-2)\cdots(m-i+1)<m^in(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)$

$\Leftrightarrow[n(m-1)][n(m-2)]\cdots[n(m-i+1)]<[m(n-1)][m(n-2)]\cdots[m(n-i+1)]$. ①

注意到 $m<n$，则对整数 $k=1,2,\cdots,i-1$ 有 $n(m-k)<m(n-k)$.

故①式成立，即(1)获证.

(2) **证法 1** 欲证式 $\Leftrightarrow(1+m)^n>\overbrace{(1+n)(1+n)\cdots(1+n)}^{m\text{项}}\cdot\overbrace{1\cdot1\cdot\cdots\cdot1}^{(n-m)\text{项}}$. ②

注意到 $1+n\neq1$，由 n 元均值不等式，②式成立，事实上，

$$(1+n)^m=(1+n)^m\cdot1^{n-m}<\left[\frac{\overbrace{(1+n)+(1+n)+\cdots+(1+n)}^{m\text{项}}+\overbrace{1+1+\cdots+1}^{(n-m)\text{项}}}{n}\right]^n=\left(\frac{mn+n}{n}\right)^n=(1+m)^n.$$

故(2)获证.

证法 2 由贝努利不等式

设 $x\geqslant-1$，$a>1$，则 $(1+x)^a\geqslant1+ax$（当且仅当 $x=0$ 时取等号）.

可推出$(1+m)^{\frac{n}{m}} > 1+\frac{n}{m}\cdot m = 1+n$,所以$(1+m)^n > (1+n)^m$,即(2)获证.

15. $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{x_3}{x_4}\cdot\cdots\cdot\frac{x_n}{x_1}\cdot 1 \leqslant \frac{1}{n}\left[\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n+\left(\frac{x_3}{x_4}\right)^n+\cdots+\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^n+1^n\right]$,

同理$\frac{x_3}{x_2} \leqslant \frac{1}{n}\left[\left(\frac{x_3}{x_4}\right)^n+\left(\frac{x_4}{x_5}\right)^n+\cdots+\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n+1^n\right]$,

…

$\frac{x_1}{x_n} \leqslant \frac{1}{n}\left[\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n+\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n+\cdots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^n+1^n\right]$,

$\frac{x_1}{x_1} \leqslant \frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot\cdots\cdot\frac{x_n}{x_1} \leqslant \frac{1}{n}\left[\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n+\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n+\cdots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^n+\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^n\right]$,

相加,两边再减去1即得所证.

16. $1+\frac{1}{a_i^2} = 1+\frac{1}{n^2a_i^2}+\frac{1}{n^2a_i^2}+\cdots+\frac{1}{n^2a_i^2} \geqslant (n^2+1)\left(\frac{1}{na_i}\right)^{\frac{2n^2}{n^2+1}}$,

相乘　左边$\geqslant (n^2+1)^n\left[\frac{1}{n^n(a_1a_2\cdots a_n)}\right]^{\frac{2n^2}{n^2+1}} \geqslant (n^2+1)^n\left[\frac{1}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^n}\right]^{\frac{2n^2}{n^2+1}} = (n^2+1)^n$.

17. 记$x_i = \sin\alpha_i$,则$\cos\alpha_i = \sqrt{1-x_i^2}\ (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$,$\prod\limits_{i=1}^{n} x_i = a$,$\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\cos\alpha_i\right)^2 = a\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}-x_i\right)$

由于$\sqrt[n]{\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}-x_i\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}} \leqslant \frac{1}{n}\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{\frac{1}{x_i}-x_i}{\frac{1}{x_i}}$,$\sqrt[n]{\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i}{\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}} \leqslant \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\frac{1}{x_i}}$,所以$\sqrt[n]{\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}-x_i\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}}+$

$\sqrt[n]{\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i}{\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}} \leqslant 1$.即$\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}-x_i\right)} \leqslant \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}-\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i} \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{a}}-\sqrt[n]{a}$,

故$\prod\limits_{i=1}^{n}\cos\alpha_i = \sqrt{a\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}-x_i\right)} \leqslant \sqrt{a\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}-\sqrt[n]{a}\right)^n}$.

等号当且仅当$\frac{x_i}{\frac{1}{x_i}} = c_1$(常数),$\frac{\frac{1}{x_i}-x_i}{\frac{1}{x_i}} = c_2$(常数)$(i = 1, 2, 3, \cdots)$,

即$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$时成立,相当于$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n$,

所以$\prod\limits_{i=1}^{n}\cos\alpha_i$的最大值是$\sqrt{a\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}-\sqrt[n]{a}\right)^n}$.

18. $\frac{a}{\cos^n\alpha}+\frac{b}{\sin^n\alpha} \geqslant \left(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}}\right)^{\frac{n+2}{2}} \Leftrightarrow a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}} \leqslant \left(\frac{a}{\cos^n\alpha}+\frac{b}{\sin^n\alpha}\right)^{\frac{2}{n+2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^{\frac{2}{n-2}}}{\left(\frac{a}{\cos^n\alpha}+\frac{b}{\sin^n\alpha}\right)^{\frac{2}{n-2}}}+\frac{b^{\frac{2}{n-2}}}{\left(\frac{a}{\cos^n\alpha}+\frac{b}{\sin^n\alpha}\right)^{\frac{2}{n-2}}}\leqslant 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{a}{\frac{a}{\cos^n\alpha}+\frac{b}{\sin^n\alpha}}\right]^{\frac{2}{n-2}}+\left[\frac{b}{\frac{a}{\cos^n\alpha}+\frac{b}{\sin^n\alpha}}\right]^{\frac{2}{n-2}}\leqslant 1$$

设 $A=\frac{a}{\sin^n\alpha}$, $B=\frac{b}{\cos^n\alpha}$,则

$$\text{上式左边}\leqslant\left(\frac{a}{A+B}\cdot\frac{a}{A+B}\right)^{\frac{1}{n-2}}+\left(\frac{b}{A+B}\cdot\frac{b}{A+B}\right)^{\frac{1}{n-2}}$$

$$=\left(\frac{A\sin^n\alpha}{A+B}\cdot\frac{A\sin^n\alpha}{A+B}\right)^{\frac{1}{n-2}}+\left(\frac{B\cos^n\alpha}{A+B}\cdot\frac{B\cos^n\alpha}{A+B}\right)^{\frac{1}{n-2}}$$

$$=\left(\frac{A}{A+B}\cdot\frac{A}{A+B}\cdot\underbrace{\sin^2\alpha\cdots\sin^2\alpha}_{n\text{个}}\right)^{\frac{1}{n-2}}+\left(\frac{B}{A+B}\cdot\frac{B}{A+B}\cdot\underbrace{\cos^2\alpha\cdots\cos^2\alpha}_{n\text{个}}\right)^{\frac{1}{n-2}}$$

$$\leqslant\frac{\frac{A}{A+B}+m\sin^2\alpha}{m-2}+\frac{\frac{B}{A+B}+m\cos^2\alpha}{m+2}=1.$$

说明 通过分析法,依据 n 元均值不等式,顺利完成证明.

19. 答案为 $n=4$ 或 $n\geqslant 6$。

由均值不等式知 $n^{\frac{1}{k}}=\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\leqslant\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}=\frac{n}{k}$,

所以,$n\geqslant k^{\frac{k}{k-1}}=k^{1+\frac{1}{k-1}}$.

如果 $k\geqslant 3$,由下面的式子

$k=3$ 时,$n\geqslant 3\sqrt{3}=\sqrt{27}>5$;$k=4$ 时,$n\geqslant 4\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{256}>5$;$k\geqslant 5$ 时,$n\geqslant 5\times 5^{\frac{1}{k-1}}>5$.

而 $k=2$ 时,由 $a_1+a_2=a_1a_2=n$,知 $n^2-4n=(a_1+a_2)^2-4a_1a_2=(a_1-a_2)^2$ 是有理数的平方,这时,对 $n\in\{1,2,3,5\}$ 都不成立,所以,$n\notin\{1,2,3,5\}$.

另一方面,对 $n=4$ 及 $n\geqslant 6$ 分别有下面的例子.

(1) 当 n 为偶数时,设 $n=2k\geqslant 4$,取 $(a_1,a_2,\cdots,a_k)=(k,2,1,\cdots,1)$,则有 $a_1+\cdots+a_k=k+2+1\cdot(k-2)=2k=n$;$a_1\cdots a_k=2k=n$.

(2) 当 n 为奇数时,如果 $n=2k+3\geqslant 9$,那么,可取 $(a_1,\cdots,a_k)=\left(k+\frac{3}{2},\frac{1}{2},4,1,\cdots,1\right)$,则有 $a_1+\cdots+a_k=\left(k+\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}+4+1\cdot(k-3)=2k+3=n$;$a_1\cdots a_k=\left(k+\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 4=2k+3=n$.

(3) 当 $n=7$ 时,取 $(a_1,a_2,a_3)=\left(\frac{4}{3},\frac{7}{6},\frac{9}{2}\right)$ 即可.

综上,所求的 n 为 $\{4,6,7,\cdots\}$ 中的数.

20. 这个不等式从形式上看较难证明,经过研究发现它有许多证法,择其简单的一种介绍如下:

应用二项式定理,得 $(a+b)^n-a^n-b^n=C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}$. (1)

根据组合数性质 $C_n^k = C_n^{n-k}$，由(1)得 $(a+b)^n - a^n - b^n = C_n^1 ab^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} a^{n-1} b$， (2)

(1)+(2) 后两边除以 2 得

$$(a+b)^n - a^n - b^n = C_n^1 \frac{a^{n-1}b + ab^{n-1}}{2} + C_n^2 \frac{a^{n-2}b^2 + a^2 b^{n-2}}{2} + \cdots + C_n^{n-1} \frac{ab^{n-1} + a^{n-1}b}{2}. \quad (3)$$

由已知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$，得 $\frac{2}{\sqrt{ab}} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$，即 $\sqrt{ab} \geqslant 2$，而

$$\frac{a^{n-1}b + ab^{n-1}}{2} \geqslant \sqrt{a^{n-1}b \cdot ab^{n-1}} = (\sqrt{ab})^n \geqslant 2^n.$$

同理 $\frac{a^{n-2}b^2 + a^2 b^{n-2}}{2} \geqslant 2^n$，

……

$\frac{ab^{n-1} + a^{n-1}b}{2} \geqslant 2^n$，

所以，结合(3)就可得 $(a+b)^n - a^n - b^n \geqslant 2^n (C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1}) = 2^n(2^n - 2) = 2^{2n} - 2^{n+1}$.

21. 令 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$，则有 $M(\lambda) \geqslant \frac{n}{n^n} + \frac{\lambda}{n^n} = \frac{1}{n^n}(n+\lambda)$.

令 $x_1 = 1$，$x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$，则有 $M(\lambda) \geqslant 1$.

故 $M(\lambda) \geqslant \max\left\{1, \frac{1}{n^n}(n+\lambda)\right\}$.

分两种情况讨论：(1) 当 $\frac{1}{n^n}(n+\lambda) \leqslant 1$ 时，$\lambda \leqslant n^n - n$.

只要证明 $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^n + (n^n - n)\prod_{k=1}^{n} x_k$. ①

由于 $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n - \sum_{k=1}^{n} x_k^n$ 展开后，有 $n^n - n$ 项，且这 $n^n - n$ 项之积一定是 $(x_1 x_2 \cdots x_n)^{n^n - n}$，所以，

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n - \sum_{k=1}^{n} x_k^n \geqslant (n^n - n) \cdot \sqrt[n^n - n]{(x_1 x_2 \cdots x_n)^{n^n - n}} = (n^n - n)\prod_{k=1}^{n} x_k \geqslant \lambda \prod_{k=1}^{n} x_k.$$

(2) 当 $\frac{1}{n^n}(n+\lambda) > 1$ 时，$\lambda > n^n - n$.

要证明 $\frac{n+\lambda}{n^n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^n + \lambda \prod_{k=1}^{n} x_k$，

只要证明 $\lambda\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n - \prod_{k=1}^{n} x_k\right] + n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^n$.

如果能证明 $(n^n - n)\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n - \prod_{k=1}^{n} x_k\right] + n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^n$，

则问题得到解决. 上式就是式①.

综上所述，$M(\lambda)$ 的最小值为 $\max\left\{1, \frac{1}{n^n}(n+\lambda)\right\}$.

22. 因 $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x - 1$

$$= x^{n-1} + \frac{x^{n-2}}{3} + \frac{x^{n-2}}{3} + \frac{x^{n-2}}{3} + \underbrace{\frac{x^{n-3}}{3^2} + \cdots + \frac{x^{n-3}}{3^2}}_{3^2\text{个}} + \cdots + \underbrace{\frac{x}{3^{n-2}} + \cdots + \frac{x}{3^{n-2}}}_{3^{n-2}\text{个}} + \underbrace{\frac{1}{3^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}}_{3^{n-1}\text{个}}$$

$\geqslant (3^0+3^1+\cdots+3^{n-1})\cdot\left(\frac{x^{n-1+3(n-2)+3^2(n-3)+\cdots+3^{n-2}}}{3^{3+2\times 3^2+\cdots+(n-2)3^{n-2}+(n-1)3^{n-1}}}\right)^{\frac{2}{3^n-1}}=\frac{3^n-1}{2}\left(\frac{x^s}{3^t}\right)^{\frac{2}{3^n-1}}$,

其中，$s=n-1+3(n-2)+3^2(n-3)+\cdots+3^{n-2}=\frac{3^n-2n-1}{4}$，

$t=3+2\times 3^2+\cdots+(n-2)3^{n-2}+(n-1)3^{n-1}=\frac{(2n-3)\times 3^n+3}{4}$.

故$(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)\cdot(y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+1)\cdot(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+1)\geqslant\left(\frac{3^n-1}{2}\right)^3\frac{(xyz)^{\frac{2s}{3^n-1}}}{3^{\frac{6t}{3^n-1}}}$

从而，$\left(\frac{1}{x^{n-1}}-x\right)\left(\frac{1}{y^{n-1}}-y\right)\left(\frac{1}{z^{n-1}}-z\right)=\frac{(1-x^n)(1-y^n)(1-z^n)}{(xyz)^{n-1}}$

$=(1-x)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)\cdot(1-y)(y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+1)(1-z)\cdot(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+1)(xyz)^{-(n-1)}$

$\geqslant 8(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)\cdot(y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+1)\cdot(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+1)(xyz)^{-(n-2)}$

$\geqslant(3^n-1)^3\times 3^{-\frac{6t}{3^n-1}}(xyz)^{\frac{2s}{3^n-1}-n+2}$

$=(3^n-1)^3\times 3^{-\frac{(2n-3)\times 3^{n+1}+9}{2(3^n-1)}}(xyz)^{\frac{5}{2}-\frac{n\times 3^n}{3^n-1}}$

$\geqslant(3^n-1)^3\times 3^{-\frac{(2n-3)\times 3^{n+1}+9}{2(3^n-1)}}\times 3^{-\frac{15}{2}+\frac{n\times 3^{n+1}}{3^n-1}}$

$=(3^n-1)^3\times 3^{-\frac{(2n-3)\times 3^{n+1}+9}{2(3^n-1)}-\frac{15}{2}+\frac{n\times 3^{n+1}}{3^n-1}}$

$=(3^n-1)^3\times 3^{-3}=\left(\frac{3^n-1}{3}\right)^3$.

23. 题设可化为$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i^k}=1$.

作变换$a_i=\frac{1}{1+x_i^k}$，则题设化为$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$，且$x_i^k=\frac{1}{a_i}-1=\frac{1-a_i}{a_i}$，

所以$x_1^k=\frac{1-a_1}{a_1}=\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_1}$，$x_1=\left(\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_1}\right)^{\frac{1}{k}}\geqslant\left[\frac{(n-1)\sqrt[n-1]{a_2a_3\cdots a_n}}{a_1}\right]^{\frac{1}{k}}$，

即有
$$x_1\geqslant\left[\frac{(n-1)\sqrt[n-1]{a_2a_3\cdots a_n}}{a_1}\right]^{\frac{1}{k}}，同理可得$$

$$x_2\geqslant\left[\frac{(n-1)\sqrt[n-1]{a_1a_3\cdots a_n}}{a_2}\right]^{\frac{1}{k}}，\cdots，x_n\geqslant\left[\frac{(n-1)\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}}{a_n}\right]^{\frac{1}{k}}.$$

以上n个式子相乘，得$\prod_{i=1}^{n}x_i\geqslant(n-1)^{\frac{n}{k}}$.

24. 不妨设$a_1=x_1$，$a_2=x_2-x_1$，$\cdots$，$a_n=a-x_{n-1}$，$M=\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{k+1}$.

由已知得
$$a_i>0(i=1,2,\cdots,n)且\sum_{i=1}^{n}a_i=a.$$

令 $c_i = \frac{a_i}{a}$，则
$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n} a_i = 1.$$

由均值不等式，$\frac{b_i^{k+1}}{c_i^k} + \underbrace{Mc_i + Mc_i + \cdots + Mc_i}_{k个} \geqslant (k+1)\sqrt[k+1]{M^k b_i^{k+1}}$，

即 $\frac{b_i^{k+1}}{c_i^k} + kMc_i \geqslant (k+1)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^k \cdot b_i$，

则 $\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^{k+1}}{c_i^k} + kM\sum_{i=1}^{n} c_i \geqslant (k+1)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{k+1}$.

所以 $\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^{k+1}}{c_i^k} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{k+1}$，

即 $a^k \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^{k+1}}{a_i^k} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{k+1}$，$\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^{k+1}}{a_i^k} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{k+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^k}$，

当且仅当 $a_i = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}\right] b_i = \frac{ab_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$ 时取等号.

所以 $\frac{b_1^{k+1}}{x_1^k} + \frac{b_2^{k+1}}{(x_2 - x_1)^k} + \cdots + \frac{b_n^{k+1}}{(a - x_{n-1})^k} \geqslant \frac{(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^{k+1}}{a^k}$.

同步检测 5

1. 利用柯西不等式即证.

2. $x \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a(a+2b)+b(b+2c)+c(c+2a)} = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1$.

3. 左边 $= a^2/(a^2+2ab+ac) + b^2/(ab+b^2+2bc) + c^2/(2ac+bc+c^2) \geqslant (a+b+c)^2/[(a^2+b^2+c^2)+3(ab+bc+ca)] = 3(a+b+c)^2/[3(a+b+c)^2+3(ab+bc+ca)] \geqslant 3(a+b+c)^2/[3(a+b+c)^2+(a+b+c)^2] = 3/4$.

4. 由柯西不等式

$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\right) \geqslant (1+2+3)^2 = 36$,

而 $x+y+z=1$，故 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z} \geqslant 36$.

5. 利用柯西不等式证明.

6. 令 $b_i = \sqrt{1-a_i}$，则 $b_i^2 = 1-a_i$，故 $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = n - \sum_{i=1}^{n} a_i = n-1$. 由柯西不等式
$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot 1\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right) = (n-1)n.$$

所以 $\sum_{i=1}^{n} b_i \leqslant \sqrt{(n-1)n}$，即 $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1-a_i} \leqslant \sqrt{(n-1)n}$.

7. 注意到 $\sum a(b+c)\cdot\sum\frac{a}{b+c}\geqslant(\sum a)^2$，及

$$\begin{aligned}2\sum a(b+c)&=2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd+2(ca+bd)\\&\leqslant 2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd+a^2+b^2+c^2+d^2\\&=(a+b+c+d)^2.\end{aligned}$$

联立上述两式即得.

8. 因 $abc=1$，故欲证不等式等价于下述不等式

$\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$. 由柯西不等式得

$$[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)]\left(\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}\right)\geqslant(bc+ca+ab)^2,$$

故 $\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}\geqslant\frac{ab+bc+ca}{2}\geqslant\frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2}=\frac{3}{2}$.

9. 由题设 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1\ (a,b>0)$ 得 $a\geqslant1$，$b\geqslant1$，$a+b=ab$，从而

$$(a+b)^n-a^n-b^n=(ab)^n-a^n-b^n=(a^n-1)(b^n-1)-1$$

$$=(b-1)(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+1)(b^{n-1}+b^{n-2}+\cdots+1)-1$$

而由柯西不等式：

$$(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+1)(b^{n-1}+b^{n-2}+\cdots+1)\geqslant[(ab)^{\frac{n-1}{2}}+(ab)^{\frac{n-2}{2}}+\cdots+(ab)^{\frac{1}{2}}+1]^2$$

$$ab=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant\left(\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2=4$$

所以 $(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+1)^2-1=(2^n-1)^2-1=2^{2n}-2^{n+1}$.

10. 已知点 $P_1(x_0,y_0)$ 及直线 l：$Ax+By+C=0\ (A^2+B^2\neq0)$.

设点 $P_2(x_1,y_1)$ 是直线 l 上的任意一点，则 $Ax_1+By_1+C=0$. (1)

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}.\qquad(2)$$

点 P_1P_2 两点间的距离 $|P_1P_2|$ 就是点 P 到直线 l 的距离，求(2)式有最小值，有

$$\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}\geqslant|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)|=$$
$$|Ax_0+By_0+C-(Ax_1+By_1+C)|$$

由(1)(2)得：

$$\sqrt{A^2+B^2}\cdot|P_1P_2|\geqslant|Ax_0+By_0+C|\ \text{即}\ |P_1P_2|\geqslant\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},\qquad(3)$$

当且仅当 $(y_0-y_1):(x_0-x_1)=\frac{B}{A}$，即 $P_1P_2\perp l$ 时，(3)式取等号，即点到直线的距离公式为

$$|P_1P_2|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

11. 由柯西不等式，得 $(x^2+y^2+z^2)[(-8)^2+6^2+(-24)^2]\geqslant(-8x+6y-24z)^2$. ①

因为 $(x^2+y^2+z^2)[(-8)^2+6^2+(-24)^2]=\frac{9}{4}\times(64+36+4\times144)=39^2$,

又$(-8x+6y-24z)^2=39^2$，

$$(x^2+y^2+z^2)[(-8)^2+6^2+(-24)^2]=(-8x+6y-24z)^2,$$

即不等式①中只有等号成立.

从而由柯西不等式中等号成立的条件，得 $\frac{x}{-8}=\frac{y}{6}=\frac{z}{-24}$.

它与$-8x+6y-24z=39$联立，可得 $x=-\frac{6}{13}$，$y=\frac{9}{26}$，$z=-\frac{18}{13}$.

12. 应用不等式(Ⅰ)及公式 $1+2+\cdots+m=\frac{m(m+1)}{2}$，

$$A>\frac{(2n+1)^2}{(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n+1)}=\frac{(2n+1)^2}{\frac{(2n+1)}{2}[(n+1)+(3n+1)]}=\frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2}=1.$$

所以 $A=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1$.

13. $\frac{1+x^2}{1+x^2}+\frac{1+y^2}{1+y^2}+\frac{1+z^2}{1+z^2}=3$，$\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}=2$，

所以 $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}=1$.

因此 $\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}}=\sqrt{2}.$$

14. 设长方体的长、宽、高分别为a、b、c，则$a^2+b^2+c^2=l^2$. 易知长方体对角线在相邻三个面内的射影长之和 $x=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}$.

由柯西不等式得

$$x^2=(1\cdot\sqrt{a^2+b^2}+1\cdot\sqrt{b^2+c^2}+1\cdot\sqrt{a^2+c^2})^2\leqslant(1^2+1^2+1^2)[(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)]=6l^2.$$

所以 $x_{\max}=\sqrt{6}l$

15. 由柯西不等式的推论，得

$$\frac{\sin^3\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin^3\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin^3\gamma}{\sin\alpha}=\frac{(\sin^2\alpha)^2}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{(\sin^2\beta)^2}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{(\sin^2\gamma)^2}{\sin\gamma\sin\alpha}$$

$$\geqslant\frac{(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)^2}{\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha}.$$

因为 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\geqslant\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha$，

所以 $0<\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha\leqslant1$，

故所证不等式成立.

16. 由不等式(Ⅰ)有 $y=\frac{a}{\sqrt{(1+x)^n}}+\frac{b}{\sqrt{(1-x)^n}}=\frac{(a^{\frac{2}{n+2}})^{\frac{n}{2}+1}}{(1+x)^{\frac{n}{2}}}+\frac{(b^{\frac{2}{n+2}})^{\frac{n}{2}+1}}{(1-x)^{\frac{n}{2}}}$

$$\geqslant\frac{(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}})^{\frac{n+2}{2}}}{(1+x+1-x)^{\frac{n}{2}}}=\frac{1}{(\sqrt{2})^n}(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}})^{\frac{n+2}{2}}.$$

当且仅当 $\frac{a^{\frac{2}{n+2}}}{1+x}=\frac{b^{\frac{2}{n+2}}}{1-x}$，即 $x=\frac{a^{\frac{2}{n+2}}-b^{\frac{2}{n+2}}}{a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}}}$ 时，上式取等号，故当 $x=\frac{a^{\frac{2}{n+2}}-b^{\frac{2}{n+2}}}{a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}}}$ 时，y 取最小值 $\frac{1}{(\sqrt{2})^n}(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}})^{\frac{n+2}{2}}$.

17. 应用不等式

$x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}\geqslant\frac{(x+y+z)^{n+1}}{3}$ 以及题设条件 $x+y+z=1$.

$$\text{不等式左边}=\frac{(x^2)^2}{y-y^{n+1}}+\frac{(y^2)^2}{z-z^{n+1}}+\frac{(z^2)^2}{x-x^{n+1}}\geqslant\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(x+y+z)-(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1})}$$

$$\geqslant\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1-\frac{1}{3^n}}=\frac{3^n}{3^{n+2}-9}.$$

18. 用 $\sum$ 表示循环和，由条件得 $b(az+cx)+c(bx+ay)-a(cy+bz)=b^2+c^2-a^2$，即 $2bcx=b^2+c^2-a^2$，所以 $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

同理 $y=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$，$z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

于是

$$f(x,y,z)=\sum\frac{x^2}{1+x}=\sum\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2+2bc(b^2+c^2-a^2)}$$

$$\geqslant\sum\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2+(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)}\tag{1}$$

$$\geqslant\frac{\left[\sum(b^2+c^2-a^2)\right]^2}{4\sum b^2c^2+\sum(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)}$$

$$=\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4\sum b^2c^2+\sum(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)-2\sum(b^2+c^2)a^2}$$

$$=\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4\sum b^2c^2+2(b^2+c^2-a^2)^2-4\sum b^2c^2}=\frac{1}{2}\tag{2}$$

不等式(1)的右端由柯西不等式的等价形式(Ⅰ)可得，并且(1)中等号成立当且仅当 $a=b=c$，即 $x=y=z=\frac{1}{2}$，此时(2)中等号成立，故当 $x=y=z=\frac{1}{2}$ 时，$f(x,y,z)$ 取最小值 $\frac{1}{2}$.

19.
$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+x)(1+z)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}$$

$$=\frac{(x^2)^2}{x(1+y)(1+z)}+\frac{(y^2)^2}{y(1+x)(1+z)}+\frac{(z^2)^2}{z(1+x)(1+y)}$$

$$\geqslant\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x(1+y)(1+z)+y(1+x)(1+z)+z(1+x)(1+y)}$$

$$=\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x+y+z+2(xy+yz+zx)+3xyz},$$

因为　$x\leqslant\dfrac{x^2+1}{2}$，$y\leqslant\dfrac{y^2+1}{2}$，$z\leqslant\dfrac{z^2+1}{2}$，

$$2(xy+yz+zx)\leqslant 2(x^2+y^2+z^2),\ x^2+y^2+z^2\geqslant 3\sqrt[3]{(xyz)^2}=3,$$

所以　$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x+y+z+2(xy+yz+zx)+3}\geqslant\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\dfrac{5}{2}(x^2+y^2+z^2)+\dfrac{9}{2}}$$

$$\geqslant\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\dfrac{5}{2}(x^2+y^2+z^2)+\dfrac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)}=\frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)\geqslant\frac{3}{4}.$$

20. 左边不等式易证，下面证右边不等式，由柯西不等式有

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\right)^2$$

$$=\left[\sqrt{a^2+c^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}+\sqrt{b^2+a^2}\cdot\frac{b}{\sqrt{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}}\right.$$

$$\left.+\sqrt{c^2+b^2}\cdot\frac{c}{\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}}\right]^2$$

$$\leqslant 2(a^2+b^2+c^2)\left[\frac{a^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}+\frac{b^2}{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}+\frac{c^2}{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}\right].$$

因此，要证右边不等式只需证

$$4(a^2+b^2+c^2)\left[\frac{a^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}+\frac{b^2}{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}+\frac{c^2}{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}\right]\leqslant\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2+b^2+c^2)[a^2(b^2+c^2)+b^2(c^2+a^2)+c^2(a^2+b^2)]\leqslant 9(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)$$

$$\Leftrightarrow 8(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\leqslant 9(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)$$

$$\Leftrightarrow a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+a^2b^4+b^2c^4+c^2a^4\geqslant 6a^2b^2c^2.$$

由均值不等式知，后一不等式显然成立，因而原不等式成立.

说明　本题右边的不等式证明难度较大，巧用柯西不等式给出的证明十分简捷.

21. 证法 1　由加权的均值不等式 $y_1=ax_1+bx_2+cx_3\geqslant(x_1^ax_2^bx_3^c)^{\frac{1}{a+b+c}}=x_1^ax_2^bx_3^c$.

同理　$y_2\geqslant x_2^ax_3^bx_1^c$，$y_3\geqslant x_3^ax_1^bx_2^c$.

相乘，注意到　$a+b+c=1$，即得.

证法 2　由柯西不等式

$$\begin{aligned}y_1y_2y_3&=(ax_1+bx_2+cx_3)(ax_2+bx_3+cx_1)(ax_3+bx_1+cx_2)(a+b+c)\\&\geqslant(a\sqrt{x_1x_2}+b\sqrt{x_2x_3}+c\sqrt{x_3x_1})^2(a\sqrt{x_3}+b\sqrt{x_1}+c\sqrt{x_2})^2\\&\geqslant(a\sqrt[4]{x_1x_2x_3}+b\sqrt[4]{x_1x_2x_3}+c\sqrt[4]{x_1x_2x_3})^4\\&=(a+b+c)^4x_1x_2x_3=x_1x_2x_3.\end{aligned}$$

证法 3　直接乘，然后用平均值不等式

$$\begin{aligned}y_1y_2y_3&=abc(x_1^3+x_2^3+x_3^3)+(a^3+b^3+c^3+3abc)x_1x_2x_3+(x_1^2x_2+x_1x_3^2+x_2^2x_3)(a^2b+ac^2+b^2c)\\&\quad+(x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_2x_3^2)(a^2c+ab^2+bc^2)\\&\geqslant 3abcx_1x_2x_3+(a^3+b^3+c^3+3abc)x_1x_2x_3+3(a^2b+ac^2+b^2c)x_1x_2x_3+3(a^2c+ab^2+\\&\quad bc^2)x_1x_2x_3\end{aligned}$$

$=(a+b+c)^2x_1x_2x_3=x_1x_2x_3$.

22. 证法 1 原不等式等价于 $\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\geqslant\frac{3}{4}$.

由柯西不等式,可得

$$\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{a^2+1+b^2+1+c^2+1}=\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+\frac{1}{3}(a+b+c)^2}=\frac{3}{4}.$$

证法 2 $\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\geqslant\frac{3}{4}$.

$\Leftrightarrow\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geqslant\frac{3}{4}$.

由柯西不等式,可得

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}\geqslant\frac{(a+b)^2}{(a+b)(a+c)+(b+c)(b+a)}=\frac{a+b}{(a+c)+(b+c)},$$

同理,$\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geqslant\frac{b+c}{(c+a)+(a+b)}$,

$\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}+\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}\geqslant\frac{c+a}{(b+c)+(a+b)}$,

为此只需证明 $\frac{a+b}{(c+a)+(b+c)}+\frac{b+c}{(c+a)+(a+b)}+\frac{c+a}{(a+b)+(b+c)}\geqslant\frac{3}{2}$.

证法 3 由柯西不等式和均值不等式,可得

$$\sum\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(a+c)+(b+c)(b+a)+(c+a)(c+b)}$$

$$\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{\frac{1}{3}[(a+b)+(b+c)+(a+c)]^2}=\frac{3}{4}.$$

23. 欲证不等式等价于 $\frac{2a+b+c}{b+c}+\frac{2b+c+a}{c+a}+\frac{2c+a+b}{a+b}\leqslant2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)$

$\Leftrightarrow3+2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\leqslant2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{3}{2}\leqslant\left(\frac{a}{c}-\frac{a}{b+c}\right)+\left(\frac{b}{a}-\frac{b}{c+a}\right)+\left(\frac{c}{b}-\frac{c}{a+b}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{3}{2}\leqslant\frac{ab}{c(b+c)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ca}{b(a+b)}$.

由不等式 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}b_i}$,得

$$\frac{ab}{c(b+c)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ca}{b(a+b)}=\frac{(ab)^2}{abc(b+c)}+\frac{(bc)^2}{abc(c+a)}+\frac{(ca)^2}{abc(a+b)}\geqslant\frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)}$$

$$= \frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)}{2abc(a+b+c)} \geqslant \frac{3abc(a+b+c)}{2abc(a+b+c)} = \frac{3}{2}.$$

故原不等式成立.

24. (1) 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则

$$0<(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)=-[a^2-(b+c)^2][a^2-(b-c)^2],$$

有 $|b-c|<a<|b+c|$，从而 a、b、c 是某个三角形的 3 条边长.

(2) 由对称性只需证 a_1、a_2、a_3 是某个三角形的 3 条边长，据柯西不等式有

$$(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4)$$

$$<\left(1\cdot\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}+1\cdot\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}+1\cdot a_4^2+\cdots+1\cdot a_n^2\right)^2$$

$$\leqslant(n-1)\left[2\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}\right)^2+a_4^4+\cdots+a_n^4\right],$$

可得 $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2>2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)$.

由第(1)问知，a_1、a_2、a_3 是某个三角形的 3 条边长.

25. 证法一 由已知得 $1+x^2$，$1+y^2$，$1+z^2$，$1+y+z^2$，$1+z+x^2$，$1+x+y^2$ 均大于 0.

由柯西不等式得

$$\left(\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\right)\cdot[(1+x^2)(1+y+z^2)+(1+y^2)(1+z+x^2)+(1+z^2)(1+x+y^2)]\geqslant(1+x^2+1+y^2+1+z^2)^2$$

故 $$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}$$

$$\geqslant\frac{(x^2+y^2+z^2+3)^2}{(1+x^2)(1+y+z^2)+(1+y^2)(1+z+x^2)+(1+z^2)(1+x+y^2)}$$

$$=\frac{x^4+y^4+z^4+9+2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2+6x^2+6y^2+6z^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(x^2+y^2+z^2)+x^2y+y^2z+z^2x+x+y+z+3}$$

$$=2+\frac{x^4+y^4+z^4+3+2(x^2+y^2+z^2)-2(x^2y+y^2z+z^2x+x+y+z)}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(x^2+y^2+z^2)+x^2y+y^2z+z^2x+x+y+z+3}$$

$$=2+\frac{(x^2-y)^2+(y^2-z)^2+(z^2-x)^2+(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(x^2+y^2+z^2)+x^2y+y^2z+z^2x+x+y+z+3}$$

$\geqslant 2$，当且仅当 $x=y=z=1$ 时，上式等号成立.

证法二 由 x，y，$z>-1$，则 $\frac{1+x^2}{1+y+z^2}$，$\frac{1+y^2}{1+z+x^2}$，$\frac{1+z^2}{1+x+y^2}$ 的每项分子分母均为正数，所以

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}\geqslant\frac{1+x^2}{1+\frac{1+y^2}{2}+z^2},\quad\frac{1+y^2}{1+z+x^2}\geqslant\frac{1+y^2}{1+\frac{1+z^2}{2}+x^2},\quad\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\geqslant\frac{1+z^2}{1+\frac{1+x^2}{2}+y^2}.$$

令 $a=\frac{1+x^2}{2}$，$b=\frac{1+y^2}{2}$，$c=\frac{1+z^2}{2}$，则

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\geqslant\frac{1+x^2}{1+\frac{1+y^2}{2}+z^2}+\frac{1+y^2}{1+\frac{1+z^2}{2}+x^2}+\frac{1+z^2}{1+\frac{1+x^2}{2}+y^2}$$

$$=\frac{2a}{2c+b}+\frac{2b}{2a+c}+\frac{2c}{2b+a}.$$

由柯西不等式得 $\frac{2a}{2c+b}+\frac{2b}{2a+c}+\frac{2c}{2b+a}\geqslant 2\times\frac{(a+b+c)^2}{a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)}$

$$=2\times\frac{3(ab+bc+ca)+\frac{1}{2}[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2]}{3(ab+bc+ca)}\geqslant 2,$$

因此,所给不等式成立.

同步检测6

1. (ⅰ) 因为 $a>0,b>0$,且 $a\neq b$,易知 $(a-b)(a^2-b^2)>0$,

故排列 a,b 与排列 a^2,b^2 同序. 根据排序原理,有 $a\cdot a^2+b\cdot b^2>ab^2+ba^2$,

即 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

(ⅱ) 因为 $a>0,b>0$ 且 $a\neq b$,易知 $(a^2-b^2)(a^3-b^3)>0$

故排列 a^2,b^2 与 a^3,b^3 同序. 根据排序原理,有

$$a^2\cdot a^3+b^2\cdot b^3>a^2\cdot b^3+b^2\cdot a^3 \text{ 即 } a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3.$$

2. 因 $\{x_i\}$ 与 $\{x_i\}$ 是同序的,而 $x_2,x_3,\cdots,x_n,x_1$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个排列,故根据排序原理,有

$$x_1\cdot x_1+x_2\cdot x_2+\cdots+x_n\cdot x_n\geqslant x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+\cdots+x_n\cdot x_1,$$

即 $$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geqslant x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1.$$

3. 由已知条件易知 $(a_i^\alpha-a_j^\alpha)(a_i^\beta-a_j^\beta)\geqslant 0$,

故排列 $a_1^\alpha,a_2^\alpha,\cdots,a_n^\alpha$ 与排列 $a_1^\beta,a_2^\beta,\cdots,a_n^\beta$ 同序. 根据排序原理,有

$$a_1^\alpha\cdot a_1^\beta+a_2^\alpha\cdot a_2^\beta+\cdots+a_n^\alpha\cdot a_n^\beta\geqslant a_1^\alpha\cdot a_2^\beta+a_2^\alpha\cdot a_3^\beta+\cdots+a_n^\alpha\cdot a_1^\beta,$$

即 $$a_1^{\alpha+\beta}+a_2^{\alpha+\beta}+\cdots+a_n^{\alpha+\beta}\geqslant a_1^\alpha a_2^\beta+a_2^\alpha a_3^\beta+\cdots+a_n^\alpha a_1^\beta.$$

4. 可以利用对称性构造两组数,然后使用排序不等式.

不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$,则 $a^2\leqslant b^2\leqslant c^2$,$\frac{1}{b+c}\leqslant\frac{1}{c+a}\leqslant\frac{1}{a+b}$,由排序不等式得

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b},$$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}+\frac{b^2}{a+b}.$$

两式相加得 $$2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\geqslant\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}+\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

又 $2(b^2+c^2)\geqslant(b+c)^2$,所以 $\frac{b^2+c^2}{b+c}\geqslant\frac{1}{2}(b+c)$. 同理 $\frac{c^2+a^2}{c+a}\geqslant\frac{1}{2}(c+a)$,$\frac{a^2+b^2}{a+b}\geqslant\frac{1}{2}(a+b)$.

所以 $2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\geqslant\frac{1}{2}(b+c)+\frac{1}{2}(c+a)+\frac{1}{2}(a+b)=a+b+c$

从而 $$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{1}{2}(a+b+c).$$

5. 先证明 $\alpha>0,\beta>0$ 时不等式成立. 不妨设 $0<x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$,

则 $\frac{1}{x_1}\geqslant\frac{1}{x_2}\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{x_n}>0$.

于是 $$0 < x_1^\beta \leqslant x_2^\beta \leqslant \cdots \leqslant x_n^\beta, \left(\frac{1}{x_1}\right)^\alpha \geqslant \left(\frac{1}{x_2}\right)^\alpha \geqslant \cdots \geqslant \left(\frac{1}{x_n}\right)^\alpha > 0.$$

由排序不等式，有

$$x_1^\beta \cdot \left(\frac{1}{x_1}\right)^\alpha + x_2^\beta \cdot \left(\frac{1}{x_2}\right)^\alpha + \cdots + x_n^\beta \cdot \left(\frac{1}{x_n}\right)^\alpha \leqslant x_1^\beta \cdot \left(\frac{1}{x_2}\right)^\alpha + x_2^\beta \cdot \left(\frac{1}{x_3}\right)^\alpha + \cdots + x_n^\beta \cdot \left(\frac{1}{x_1}\right)^\alpha,$$

即 $$x_1^{\beta-\alpha} + x_2^{\beta-\alpha} + \cdots + x_n^{\beta-\alpha} \leqslant \frac{x_1^\beta}{x_2^\alpha} + \frac{x_2^\beta}{x_3^\alpha} + \cdots + \frac{x_n^\beta}{x_1^\alpha}.$$

同理可证 $\alpha<0,\beta<0$ 时不等式成立.

6. 设 $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$，则 $xyz=1$，且所需证明的不等式可化为

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{2}{3}.$$

现不妨设 $x \geqslant y \geqslant z$，则 $\frac{x}{y+z} \geqslant \frac{y}{z+x} \geqslant \frac{z}{x+y}$，据排序不等式得

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant z \cdot \frac{x}{y+z} + x \cdot \frac{y}{z+x} + y \cdot \frac{z}{x+y},$$

及 $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant y \cdot \frac{x}{y+z} + z \cdot \frac{y}{z+x} + x \cdot \frac{z}{x+y}.$

两式相加并化简可得 $2\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right) \geqslant x+y+z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz} = 3.$

7. 应先构造两个由小到大的排序.

将 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 按由小到大的顺序排成 $a_{j_1} < a_{j_2} < \cdots < a_{j_n}$，其中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列，则 $a_{j_1} \geqslant 1, a_{j_2} \geqslant 2, \cdots, a_{j_n} \geqslant n$. 于是由排序不等式，得

$$a_1 + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} \geqslant a_{j_1} + \frac{a_{j_2}}{2^2} + \cdots + \frac{a_{j_n}}{n^2} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

8. 应注意到 $a_i \cdot \frac{1}{a_i} = 1(i=1,2,\cdots,n)$，不妨设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$. 因为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都大于 0，所以有 $\frac{1}{a_1} \leqslant \frac{1}{a_2} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{a_n}$. 又 $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}$ 是 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}$ 的任意一个排列，于是得到

$$n = a_1 \cdot \frac{1}{a_1} + a_2 \cdot \frac{1}{a_2} + \cdots + a_n \cdot \frac{1}{a_n} \leqslant a_1 \cdot \frac{1}{b_1} + a_2 \cdot \frac{1}{b_2} + \cdots + a_n \cdot \frac{1}{b_n}.$$

9. 设 $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$，这里 x, y, z 都是正数，则原需证明的不等式化为 $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \leqslant xyz$，显然 $x+y-z$, $y+z-x$, $z+x-y$ 中最多只有一个非负数，若 $x+y-z, y+z-x, z+x-y$ 中恰有一个非正数，则此时结论显然成立. 若 $x+y-z$, $y+z-x$, $z+x-y$ 均为正数，则 x, y, z 是某三角形的三边长. 容易验证

$$(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \leqslant \frac{1}{3}[x^2(y+z-x) + y^2(z+x-y) + z^2(y+x-z)].$$

故得 $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\leqslant xyz$.

10. 因为 $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2$，故原不等式等价于 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}x_iz_i$，此式左边为顺序和，右边为乱序和，由排序不等式知其成立.

11. 令 $S=a^2+3b^2+5c^2+7d^2$，由同序和≥混序和得

$$S\geqslant 3a^2+5b^2+7c^2+d^2$$
$$S\geqslant 5a^2+7b^2+c^2+3d^2$$
$$S\geqslant 7a^2+b^2+3c^2+5d^2$$

把以上四式相加得　$4S\geqslant 16(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

由柯西不等式可得　$16(a^2+b^2+c^2+d^2)$

$$=4(1^2+1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)$$
$$\geqslant 4(1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c+1\cdot d)^2=4.$$

所以 $S\geqslant 1$. 即 $a^2+3b^2+5c^2+7d^2\geqslant 1$.

12. 设 $i_1,i_2,\cdots,i_s,j_1,j_2,\cdots,j_t$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，且使得

$$x_{i_1}\geqslant x_{i_2}\geqslant\cdots\geqslant x_{i_s}\geqslant 0>x_{j_1}\geqslant x_{j_2}\geqslant\cdots\geqslant x_{j_t}.$$

又设 $a=x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_s}$，$b=-(x_{j_1}+x_{j_2}+\cdots+x_{j_t})$，根据已知条件，有 $a-b=0$，$a+b=1$，所以 $a=b=\frac{1}{2}$.

不妨设 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\geqslant 0$.（否则，若 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}<0$，取 $y_i=-x_i$，$i=1,2,\cdots,n$，此时 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 仍满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i|=1$，$\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=0$，且 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{y_i}{i}>0$.）由排序不等式，有 $1\cdot x_1+\frac{1}{2}\cdot x_2+\cdots+\frac{1}{n}\cdot x_n\leqslant 1\cdot x_{i_1}+\frac{1}{2}\cdot x_{i_2}+\cdots+\frac{1}{s}x_{i_s}+\frac{1}{s+1}\cdot x_{j_1}+\frac{1}{s+2}\cdot x_{j_2}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot x_{j_t}\leqslant(x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_s})+\frac{1}{n}(x_{j_1}+x_{j_2}+\cdots+x_{j_t})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$.

从而 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$.

13. 记 $A_i=a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n(i=1,2,\cdots,n)$，根据排序不等式，我们只须证明以下情况：设 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，$A_1\geqslant A_2\geqslant\cdots\geqslant A_n$，有 $b_1A_1+b_2A_2+\cdots+b_nA_n\leqslant\frac{p}{(n-1)^{n-1}}(n\geqslant 2)$. ①

由于 $0\leqslant b_i\leqslant p$，$b_1+b_2+\cdots+b_n=1$，$\frac{1}{2}\leqslant p\leqslant 1$，所以

$$b_1A_1+b_2A_2+\cdots+b_nA_n\leqslant b_1A_1+(b_2+b_3+\cdots+b_n)A_2=b_1A_1+(1-b_1)A_2. \quad ②$$

又　$pA_1+(1-p)A_2-b_1A_1-(1-b_1)A_2=p(A_1-A_2)-b_1(A_1-A_2)=(p-b_1)(A_1-A_2)$. ③

故由②，③知 $b_1A_1+b_2A_2+\cdots+b_nA_n\leqslant pA_1+(1-p)A_2\leqslant p(A_1+A_2)$. ④

由均值不等式，有 $A_1+A_2=a_3\cdot a_4\cdots a_n(a_1+a_2)\leqslant\left[\frac{1}{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\right]^{n-1}$. ⑤

由于 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$, ⑥

所以，由④、⑤、⑥即得①，故所要证的不等式成立.

14. 证法1 令 $A=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$，$B=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$.

先证：$A\geqslant B$. $A-B=\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$

$=\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}=\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}-\frac{(b-c)+(c-a)}{c}$

$=(b-c)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+(c-a)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc}$.

因为 $a\geqslant b\geqslant c>0$，所以 $A-B\geqslant 0$，即 $A\geqslant B$.

所以 $2A\geqslant A+B=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$.

再证 $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geqslant\frac{2}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

因为 $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geqslant\frac{2}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{a}+\frac{b+c+a}{b}+\frac{c+a+b}{c}\geqslant\frac{2}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+3$

$\Leftrightarrow(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant\frac{2}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+3$

$\Leftrightarrow(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$.

这个不等式显然成立.

所以 $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geqslant\frac{2}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

所以 $2A\geqslant\frac{2}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$，所以 $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

证法2 由 $a\geqslant b\geqslant c>0$，可得 $\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{b}\leqslant\frac{1}{c}$，易知欲证不等式为切比雪夫不等式的特例，下略.

15. 因为 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$，所以 $d+e\geqslant c+e\geqslant b+d\geqslant a+c\geqslant a+b$.
利用切比雪夫不等式，有

$$a(d+e)+b(c+e)+c(b+d)+d(a+c)+e(a+b)$$
$$\leqslant\frac{1}{5}(a+b+c+d+e)[(d+e)+(c+e)+(b+d)+(a+c)+(a+b)]=\frac{2}{5},$$

即 $ad+dc+cb+be+ea\leqslant\frac{1}{5}$.

16. 由条件及切比雪夫不等式有 $n\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=s\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$,

又 $r,t>0$，所以 $rn\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant rs\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$,

$$(rn-t)\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \geqslant rs\sum_{i=1}^{n}b_i - t\sum_{i=1}^{n}a_ib_i = \sum_{i=1}^{n}(rs-ta_i)b_i,$$

注意到 $rn-t>0$，故 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i \geqslant \frac{1}{rn-t}\sum\limits_{i=1}^{n}(rs-ta_i)b_i$.

17. 类似第 16 题可证，略.

18. 若 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 时显然成立，现设

$$A=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\neq 0,\qquad B=\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\neq 0.$$

记 $x_1=\frac{|a_1|}{A}, x_2=\frac{|a_2|}{A},\cdots,x_n=\frac{|a_n|}{A}, x_{n+1}=\frac{|b_1|}{B}, x_{n+2}=\frac{|b_2|}{B},\cdots,x_{2n}=\frac{|b_n|}{B}$.

由排序原理有 $x_1x_{n+1}+x_2x_{n+2}+\cdots+x_nx_{2n}+x_{n+1}x_1+\cdots+x_{2n}x_n \leqslant x_1x_1+x_2x_2+\cdots+x_{2n}x_{2n}$,

即 $2\left(\frac{|a_1b_1|}{AB}+\frac{|a_2b_2|}{AB}+\cdots+\frac{|a_nb_n|}{AB}\right)\leqslant \frac{a_1^2}{A^2}+\frac{a_2^2}{A^2}+\cdots+\frac{a_n^2}{A^2}+\frac{b_1^2}{B^2}+\cdots+\frac{b_n^2}{B^2}=2$,

得 $\sum\limits_{i=1}^{n}|a_ib_i|\leqslant AB=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}$,

进而 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}|a_ib_i|\leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}$,

即 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\right)$.

19. 由于 $a<b<c$，所以 $A<B<C<\frac{\pi}{2}$，故 $\cos A>\cos B>\cos C$. 因此 q 是倒序积，由切比雪夫不等式

$$\frac{1}{3}q\leqslant\frac{1}{3}(a+b+c)\cdot\frac{1}{3}(\cos A+\cos B+\cos C)\leqslant\frac{1}{3}p,$$

即 $q\leqslant p$.

20. 不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$，则 $h_a\geqslant h_b\geqslant h_c$，于是 $a^n\leqslant b^n\leqslant c^n, h_a^n\geqslant h_b^n\geqslant h_c^n$.
欲证不等式为乱序和，故 $(ah_b)^n+(bh_c)^n+(ch_a)^n\geqslant(ah_a)^n+(bh_b)^n+(ch_c)^n=3\cdot 2^n\Delta^n$.

21. 记 $S=x_1+x_2+\cdots+x_n$，只要证明 $\frac{x_1}{S-x_1}+\frac{x_2}{S-x_2}+\cdots+\frac{x_n}{S-x_n}\geqslant\frac{n}{n-1}$.

不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$，则有

$$S-x_1\leqslant S-x_2\leqslant\cdots\leqslant S-x_n，且\frac{x_1}{S-x_1}\geqslant\frac{x_2}{S-x_2}\geqslant\cdots\geqslant\frac{x_n}{S-x_n}.$$

由切比雪夫不等式，有

$$\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{S-x_1}+\frac{x_2}{S-x_2}+\cdots\cdots+\frac{x_n}{S-x_n}\right)\times\frac{1}{n}[(S-x_1)+(S-x_2)+\cdots+(S-x_n)]$$
$$\geqslant\frac{1}{n}\left[\frac{x_1}{S-x_1}(S-x_1)+\frac{x_2}{S-x_2}(S-x_2)+\cdots+\frac{x_n}{S-x_n}(S-x_n)\right]=\frac{S}{n},$$

化简整理即得.

22. 由基本不等式知，有 $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant n$.

以下证明右边的不等式：不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$.

根据排序不等式，可知 $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\leqslant\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_2}{a_{n-1}}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}$.

对于 $x\in\left[\frac{p}{q},\frac{q}{p}\right]$，有 $x+\frac{1}{x}=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+2\leqslant\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2+2$.

当 $n=2k$ 为偶数时，则

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\leqslant\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\right)+\cdots+\frac{a_k}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_k}$$

$$\leqslant k\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2+2k=n+\frac{n}{2}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2.$$

当 $n=2k-1$ 为奇数时，则 $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\leqslant\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_{k-1}}\right)+\frac{a_k}{a_k}$

$\leqslant(k-1)\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2+2(k-1)+1=n+\frac{n-1}{2}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2$.

综合上述两种情况，立即得要证的不等式.

23. 由对称性，可设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$，则有 $\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x_n}}$.

由切比雪夫不等式，有 $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}$.

再由幂平均不等式，得 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\right]^{-\frac{1}{2}}=$
$\sqrt{\frac{n}{n-1}}$.

从而，有 $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\sqrt{\frac{n}{n-1}}$.

又由柯西不等式，有 $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\leqslant\sqrt{n}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\sqrt{n}$.

故有 $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$.

24. 假设 $x\leqslant y\leqslant z$，则 $\frac{1}{(1+y)(1+z)}\leqslant\frac{1}{(1+z)(1+x)}\leqslant\frac{1}{(1+x)(1+y)}$.

由切比雪夫不等式，有 $\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}$

$\geqslant\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)\cdot\left[\frac{1}{(1+y)(1+z)}+\frac{1}{(1+z)(1+x)}+\frac{1}{(1+x)(1+y)}\right]$

$=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)\cdot\frac{3+(x+y+z)}{(1+x)(1+y)(1+z)}$.

令 $\frac{1}{3}(x+y+z)=a$. 由琴生不等式及均值不等式，得

$$\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)\geqslant a^3,\ x+y+z\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}=3.$$

$$(1+x)(1+y)(1+z)\leqslant\left[\frac{(1+x)+(1+y)+(1+z)}{3}\right]^3=(1+a)^3.$$

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geqslant a^3\ \frac{3+3}{(1+a)^3}.$$

只要证明 $\frac{6a^3}{(1+a)^3}\geqslant\frac{3}{4}$. 由于 $a\geqslant 1$,上式显然成立,等号当且仅当 $x=y=z=1$ 时成立.

说明 此题可以推广如下:设 x,y,z 是正实数,且 $xyz=1$,对于 $a\geqslant 1$,$n\geqslant 1$,则有

$$\frac{x^n}{(a+y)(a+z)}+\frac{y^n}{(a+z)(a+x)}+\frac{z^n}{(a+x)(a+y)}\geqslant\frac{3}{(1+a)^2}.$$

当且仅当 $x=y=z=1$ 时等号成立.

证明 由对称性,不妨设 $x\geqslant y\geqslant z>0$,则 $x^m\geqslant y^m\geqslant z^m>0(m\geqslant 0)$,根据切比雪夫不等式及 $x^m+y^m+z^m\geqslant 3$. 可得

$$\begin{aligned}&(a+1)^2[x^n(a+x)+y^n(a+y)+z^n(a+z)]\\&=a^3(x^n+y^n+z^n)+3a^2(x^n+y^n+z^n)+3a(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1})+(x^{n-1}+y^{n+1}+z^{n-1})+\\&\quad a(a-1)[(x^{n+1}+y^{n-1}+z^{n+1})-(x^n+y^n+z^n)]\geqslant 3a^3+a^2(x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1})\\&\quad (x+y+z)+a(x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1})(x^2+y^2+z^2)+3+a(a-1)\left[\frac{1}{3}(x+y+z)(x^n+y^n+z^n)\right.\\&\quad\left.-(x^n+y^n+z^n)\right]\\&\geqslant 3a^3+3a^2(x+y+z)+3a(x^2+y^2+z^2)+3\\&\geqslant 3[a^3+a^2(x+y+z)+a(yz+zx+xy)+1]\\&=3(a+x)(a+y)(a+z),\end{aligned}$$

两边同除以 $(a+x)(a+y)(a+z)(1+a)^2$ 即得所证式子.

25. 先考虑证明局部不等式,即处理左边分式的每一项,由于三项结构相同,仅需考虑一项.

记所证不等式的左边为 S,因为 $a\geqslant b\geqslant c>0$,$x\geqslant y\geqslant z>0$,则由排序不等式可得 $bz+cy\leqslant by+cz$.

所以
$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}\geqslant\frac{a^2x^2}{(by+cz)^2}\geqslant\frac{a^2x^2}{2[(by)^2+(cz)^2]},$$

令 $\alpha=(ax)^2$,$\beta=(by)^2$,$\gamma=(cz)^2$,由上式变为 $\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}\geqslant\frac{\alpha}{2(\beta+\gamma)}$.

因此
$$S\geqslant\frac{\alpha}{2(\beta+\gamma)}+\frac{\beta}{2(\alpha+\gamma)}+\frac{\gamma}{2(\beta+\alpha)}.$$

由柯西不等式可得

$$\left(\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha+\gamma}+\frac{\gamma}{\beta+\alpha}\right)[\alpha(\beta+\gamma)+\beta(\alpha+\gamma)+\gamma(\beta+\alpha)]\geqslant(\alpha+\beta+\gamma)^2,$$

所以 $S\geqslant\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}$.

又由 $(\alpha+\beta+\gamma)^2\geqslant 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$,所以 $S\geqslant\frac{3}{4}$.

同步检测 7

1. 本题若一一验证函数值之间的关系将使简单问题复杂化.若认识函数性质的本质属性,区间上的凹凸性的代数解释为不等式 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$;作区间内的草图,注意凹凸性的理解,$y=2^x$ 不满足,$y=\log_2 x$ 满足,$y=x^2$ 不满足,$y=\cos 2x$ 不满足,选 B.

说明 函数 $f(x)$ 的凹凸性的代数解释为:区间上凹 $\Leftrightarrow$ 不等式 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$;区间上凸 $\Leftrightarrow$ 不等式 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$;利用凹凸性可简化求解某些函数的信息迁移问题.

2. 特殊函数法.取 $f(x)=x^3$,易知 $f(x)$ 满足题设诸条件,当 $x<0$ 时,$f'(x)=3x^2>0$,$f''(x)=6x<0$,故此时 $f(x)$ 是单调下降的凹函数,选 D.

3. A **4.** A **5.** C

6. 这是答案开放题,符合条件的函数很多,如:

$f(x)=\frac{5}{x+1}-1(x>0)$; $f(x)=4-5\left(\frac{1}{2}\right)^x(x>0)$;

$f(x)=\frac{10}{\pi}\arctan x-1(x>0)$;$f(x)=5^{1-\frac{1}{x}}-1(x>0)$; $f(x)=5^{1-\frac{x}{2}}-1(x>0)$ 等.

7. 由 $y=x^2$ 的凸性,可知 $\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2$.

即 $a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant\frac{1}{4}(a+b+c+d)^2=\frac{1}{4}\cdot 7960=1990$,

当 $a=b=c=d=\frac{1}{4}\sqrt{7960}=\frac{1}{2}\sqrt{1990}$ 时取最小值 1990.

求条件最值有两个最基本的思路.其一是用不等式取等号的条件,中学里平均值不等式用得最多,而凸函数的性质用起来最方便.

8. 由 $y=\lg x$ 为凹函数,得 $\lg a+2\lg b=3\left(\frac{1}{3}\lg a+\frac{2}{3}\lg b\right)\leqslant 3\lg\left(\frac{a}{3}+\frac{2b}{3}\right)=3\lg 2$.

当 $a=b=2$ 时,取最大值 $3\lg 2$.

9.(1) 欲证 $\frac{1}{2}(a^{x_1}+a^{x_2})\geqslant a^{\frac{x_1+x_2}{2}}$,

只需证 $(a^{x_1}+a^{x_2})\geqslant 2a^{\frac{x_1}{2}}a^{\frac{x_2}{2}}$,

即证 $(a^{\frac{x_1}{2}}-a^{\frac{x_2}{2}})^2\geqslant 0$.

而这是显然成立的.

所以 $f(x)=a^x$ 是凸函数.

(2) 欲证 $\frac{1}{2}(\lg x_1+\lg x_2)\leqslant\lg\frac{x_1+x_2}{2}$,

只需证 $\lg x_1x_2\leqslant 2\lg\frac{x_1+x_2}{2}$,

即证 $x_1x_2 \leqslant \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$，即证 $(x_1-x_2)^2 \geqslant 0$，而这是当然成立的．所以 $f(x)=\lg x$ 是凹函数．

10. (1) 是；(2) 不是．

11. (1) 紧扣凸函数定义，问题转化为 $\frac{1}{2}a(x_1-x_2)^2 \leqslant 0$ 是否成立．当 $a<0$ 时，此不等式成立，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是凸函数．

(2) $-2 \leqslant a < 0$．

12. 由 $y=\sqrt{x}$ 为凹函数，有 $\frac{1}{n}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}) \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}=\frac{10}{\sqrt{n}}$，

得 $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n} \leqslant 10\sqrt{n}$．

又 $(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n})^2$

$=x_1+x_2+\cdots+x_n+2(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_3}+\cdots+\sqrt{x_{n-1}x_n}) \geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n=100$．

得 $10 \leqslant \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}$．

13. 令 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{4x+1}$．从而，有 $2f'(x)=\frac{1-4x}{\sqrt{x}(4x+1)^2} \Rightarrow 2f''(x)=\frac{24(x-a)(x+b)}{[\sqrt{x}(4x+1)]^3}$，

其中，$0<x<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<a=\frac{2\sqrt{3}+3}{12}<1$，$b=\frac{2\sqrt{3}-3}{12}>0$．

故可知 $f''(x)<0$，$f(x)$ 是 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上的凹函数．

于是，由此可推出 $\frac{\sqrt{x}}{4x+1}+\frac{\sqrt{y}}{4y+1}+\frac{\sqrt{z}}{4z+1} \leqslant 3\times\frac{\sqrt{\frac{1}{6}}}{\frac{4}{6}+1}=\frac{3\sqrt{6}}{10}$．

14. (1) 对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$，$a>0$，

因为 $f(x_1)+f(x_2)-2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

$=ax_1^2+x_1+ax_2^2+x_2-2\left[a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\frac{x_1+x_2}{2}\right]$

$=ax_1^2+ax_2^2-\frac{1}{2}a(x_1^2+x_2^2+2x_1x_2)=\frac{1}{2}a(x_1-x_2)^2 \geqslant 0$，

所以 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$．

故函数 $f(x)$ 是凹函数．

(2) 由 $|f(x)| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant f(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant ax^2+x \leqslant 1$． (1)

当 $x=0$ 时，$a \in \mathbf{R}$；

当 $x \in (0,1]$ 时，即 $\begin{cases} ax^2+x \geqslant -1, \\ ax^2+x \leqslant 1 \end{cases}$ 恒成立，即

$\begin{cases} a \geqslant -\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}, \\ a \leqslant \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \end{cases}$ 恒成立．

因为 $x\in(0,1]$，所以 $\frac{1}{x}\geqslant 1$.

当 $\frac{1}{x}=1$ 时，$-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ 取得最大值 -2，$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ 取得最小值 0.

所以 $-2\leqslant a\leqslant 0$，结合 $a\neq 0$，得 $-2\leqslant a<0$.

综上可知，a 的范围是 $[-2,0)$.

说明 此题第(1)问要求学生抓住信息，透彻理解，按定义解题. 第(2)问将恒成立的不等式转化为函数最值来解决，其依据是：

$a\geqslant f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a\geqslant f(x)$ 最大值；$a\leqslant f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a\leqslant f(x)$ 最小值.

15. 考虑到(Ⅰ)是(Ⅱ)的特殊情形，下面只证明(Ⅱ).

观察要证不等式的结构，构造函数 $f(x)=x\log_2 x$.

$f''(x)=\frac{1}{x\ln 2}>0$，$x\in(0,+\infty)$，

故 $f(x)$ 是凸函数，$\frac{f(p_1)+f(p_2)+f(p_3)+\cdots+f(p^{2^n})}{2^n}\geqslant f\left(\frac{p_1+p_2+p_3+\cdots+p^{2^n}}{2^n}\right)$

故 $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3)+\cdots+f(p^{2^n})\geqslant 2^n\cdot\frac{1}{2^n}\log_2\frac{1}{2^n}$

故 $p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+p_3\log_2 p_3+\cdots+p^{2^n}\log_2 p^{2^n}\geqslant -n$.

说明 对于本题中出现的形如 $g(x)=x\log_2 x$ 的一类函数，在 2004 年全国高考理科数学题中也曾出现过，而且它们蕴涵的都是凸函数的一些独特性质，函数的凸性理论在大学数学中占重要的地位，应该引起广大中学师生的重视. 本题更一般的结论是：

(Ⅲ) 设 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 为任意 m 个正数，则

$$p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+\cdots+p_m\log_2 p_m\geqslant(p_1+p_2+\cdots+p_m)\log_2\frac{p_1+p_2+\cdots+p_m}{m}.$$

16. 证明 Ⅰ：设 $0<a<b$，我们来证明 $0<g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2$.

先证 $0<g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

即要证 $\frac{g(a)+g(b)}{2}>g\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 只要证 $g(x)$ 是凹函数即可.

事实上 $g''(x)=\frac{1}{x}>0$，$x\in(0,+\infty)$ 得证.

再证 $g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2$.

只要证 $g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)-(b-a)\ln 2<0$.

构造函数 $G(x)=g(a)+g(x)-2g\left(\frac{a+x}{2}\right)-(x-a)\ln 2$

$$G'(x)=\ln x-\ln\frac{a+x}{2}-\ln 2=\ln x-\ln(a+x),\ x>0,\ G'(x)<0.$$

因此 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数.

因为 $G(a)=0, b>a, G(b)<0$.

即 $g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2$.

题中 a,b 无法分离到不等式左右两侧. 转换思维，考虑固定 a，让 b"动"起来，构造函数 $F(x)=g(a)+g(x)-2g\left(\frac{a+x}{2}\right)$，由于 $F(a)=0$，即证 $F(b)>F(a)$.

证明 2：设 $F(x)=g(a)+g(x)-2g\left(\frac{a+x}{2}\right)$，则 $F'(x)=g'(x)-2\left[g\left(\frac{a+x}{2}\right)\right]'=\ln x-\ln\frac{a+x}{2}=\ln\frac{2x}{a+x}$.

当 $0<x<a$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 在 $(0,a)$ 内为减函数；

当 $x>a$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上为增函数.

从而，当 $x=a$ 时，$F(x)$ 有最小值 $F(a)=0$.

又因为 $b>a>0$，所以 $F(b)>F(a)=0$，即 $g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$.

17. 证明：由于 $a>0, b>0, 0<2\lambda\leqslant 1$，运用幂平均不等式，得

$$\left(\frac{a}{2a+b}\right)^{\lambda}+\left(\frac{b}{a+2b}\right)^{\lambda}=\left(\sqrt{\frac{a}{2a+b}}\right)^{2\lambda}+\left(\sqrt{\frac{b}{a+2b}}\right)^{2\lambda}$$

$$\leqslant 2^{1-2\lambda}\left(\sqrt{\frac{a}{2a+b}}+\sqrt{\frac{b}{a+2b}}\right)^{2\lambda}\leqslant 2^{1-2\lambda}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2\lambda}=\frac{2}{3^{\lambda}}.$$

即有 $\left(\frac{a}{2a+b}\right)^{\lambda}+\left(\frac{b}{a+2b}\right)^{\lambda}\leqslant\frac{2}{3^{\lambda}}$.

同理 $\left(\frac{a}{a+2b}\right)^{\lambda}+\left(\frac{b}{2a+b}\right)^{\lambda}\leqslant\frac{2}{3^{\lambda}}$.

从而，将如上两个不等式叠加，变形后立得所要证的不等式.

18. 证明：令 $f(x)=x^t$，则 $f'(x)=tx^{t-1}$，$f''(x)=t(t-1)x^{t-2}$.

(1) 当 $0<t<1$，$x\geqslant 3$ 时，$f''(x)=t(t-1)x^{t-2}<0$，函数 $f(x)=x^t$ 是凹函数，于是，由琴生不等式，得 $\frac{f(x)+f(x-2)}{2}<f\left(\frac{x+x-2}{2}\right)=f(x-1)$，

$f(x)-f(x-1)<f(x-1)-f(x-2)$，

递推得 $f(x-1)-f(x-2)<f(x-2)-f(x-3)$，

从而有 $f(x)-f(x-1)<f(x-2)-f(x-3)$，

故 $$x^t-(x-1)^t<(x-2)^t-(x-3)^t.$$

(2) 当 $t>1$，$x\geqslant 3$ 时，$f''(x)=t(t-1)x^{t-2}>0$，函数 $f(x)=x^t$ 是凸函数，于是，由琴生不等式，得 $\frac{f(x)+f(x-2)}{2}>f\left(\frac{x+x-2}{2}\right)=f(x-1)$，

即 $$f(x)-f(x-1)>f(x-1)-f(x-2),$$

递推得 $$f(x-1)-f(x-2)>f(x-2)-f(x-3),$$

从而有 $$f(x)-f(x-1)>f(x-2)-f(x-3),$$

故 $$x^t-(x-1)^t>(x-2)^t-(x-3)^t.$$

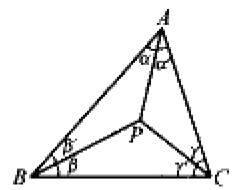
19. 设 $f(x)=\ln\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\ln\sin x-\ln x$，因为当 $x>0$ 时，$x>\sin x$，故 $f''(x)=-\csc^2 x+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}<0$，$(0<x<\pi)$

所以 $f(x)$ 是凸函数，由 Jensen 不等式 $f(x)=f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$，

即 $\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leqslant nf(x)$.

又 e^x 为增函数，所以 $\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin x_i}{x_i}=e^{\sum_{i=1}^{n}f(x_i)}\leqslant e^{nf(x)}=\left|\frac{\sin x}{x}\right|^n$.

20. 如图，引进记号 $\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma'$，在 $\triangle PAB$ 中由正弦定理，有
$$PA\sin\alpha=PB\sin\beta'.$$



同理 $PB\sin\beta=PC\sin\gamma'$，$PC\sin\gamma=PA\sin\alpha'$.
相乘 $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin\alpha'\sin\beta'\sin\gamma'$.
由 $\lg\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上为凸函数有
$$\lg(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2=\lg\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\alpha'\sin\beta'\sin\gamma'$$
$$=\lg\sin\alpha+\lg\sin\beta+\cdots+\lg\sin\beta'+\lg\sin\gamma'$$
$$\leqslant 6\lg\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\alpha'+\beta'+\gamma'}{6}=6\lg\sin\frac{\pi}{6}=\lg\left(\frac{1}{2}\right)^6.$$

得 $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leqslant\frac{1}{8}$.

α,β,γ 中必存在一个其正弦值不大于 $\frac{1}{2}$，设 $\sin\alpha\leqslant\frac{1}{2}$，当 $\alpha\leqslant30^\circ$ 时，命题成立，当 $\alpha\geqslant150^\circ$ 时，必有 $\beta\leqslant30^\circ$，命题也成立.

21. 用反证法，假设存在某一组正数 a_0,b_0,c_0，使
$$\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2+8b_0c_0}}+\frac{b_0}{\sqrt{b_0^2+8a_0c_0}}+\frac{c_0}{\sqrt{c_0^2+8a_0b_0}}<1.$$

令 $x=\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2+8b_0c_0}}$，$y=\frac{b_0}{\sqrt{b_0^2+8a_0c_0}}$，$z=\frac{c_0}{\sqrt{c_0^2+8a_0b_0}}$，

则 $\frac{x^2}{1-x^2}=\frac{a_0^2}{8b_0c_0}$，$\frac{y^2}{1-y^2}\geqslant\frac{b_0^2}{8a_0c_0}$，$\frac{z^2}{1-z^2}=\frac{c_0^2}{8a_0b_0}$.

故 $$\frac{x^2}{1-x^2}\cdot\frac{y^2}{1-y^2}\cdot\frac{z^2}{1-z^2}\geqslant\frac{1}{8^3}.\qquad(1)$$

由 $x+y+z<1$，有
$$\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\cdot\frac{z}{1-z}<\frac{x}{y+z}\cdot\frac{y}{x+z}\cdot\frac{z}{x+y}\leqslant\frac{x}{2\sqrt{yz}}\cdot\frac{y}{2\sqrt{xz}}\cdot\frac{z}{2\sqrt{xy}}=\frac{1}{8}.\qquad(2)$$

又由 $f(x)=\frac{x}{1+x}$ 在 $(0,1)$ 内图形是双曲线上一段凹弧，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内是凹函数，由琴生不等

式,有 $\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\leqslant 3\cdot\frac{\frac{x+y+z}{3}}{1+\frac{x+y+z}{3}}=3\cdot\frac{1}{\frac{3}{x+y+z}+1}$

$$<3\times\frac{1}{\frac{3}{1}+1}=\frac{3}{4}(x+y+z<1\text{ 可得}).$$

故 $\frac{x}{1+x}\cdot\frac{y}{1+y}\cdot\frac{z}{1+z}\leqslant\left(\frac{\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}}{3}\right)^3<\frac{1}{4^3}$. (3)

由(2)、(3)可得 $\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\cdot\frac{z}{1-z}\cdot\frac{x}{1+x}\cdot\frac{y}{1+y}\cdot\frac{z}{1+z}<\frac{1}{8^3}$,

即 $\frac{x^2}{1-x^2}\cdot\frac{y^2}{1-y^2}\cdot\frac{z^2}{1-z^2}<\frac{1}{8^3}$,

与式(1)矛盾. 从而原不等式成立.

22. 由琴生不等式有 $\left(\frac{u+v+w}{3}\right)^3\leqslant\frac{u^3+v^3+w^3}{3}$,其中 u、v、w 均为正实数.

令 $u=\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}$, $v=\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}$, $w=\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}$.

则有 $\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\leqslant\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b+\frac{1}{b}+6c+\frac{1}{c}+6a}$

$$\leqslant\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{abc}+6(a+b+c)}.$$

由于 $a+b=\frac{1-ab}{c}=\frac{ab-(ab)^2}{abc}$,

$b+c=\frac{1-bc}{a}=\frac{bc-(bc)^2}{abc}$,

$c+a=\frac{1-ca}{b}=\frac{ca-(ca)^2}{abc}$,

于是,有 $\frac{ab+bc+ca}{abc}+6(a+b+c)=\frac{1}{abc}+3[(a+b)+(b+c)+(c+a)]$

$$=\frac{1}{abc}(4-3[(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2]).$$

由柯西不等式有 $3[(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2]\geqslant(ab+bc+ca)^2=1$.

故 $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{abc}+6(a+b+c)}\leqslant\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$.

于是,只要证 $\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\leqslant\frac{1}{abc}$,即证 $a^2b^2c^2\leqslant\frac{1}{27}$.

由平均值不等式可得 $a^2b^2c^2=(ab)(bc)(ca)\leqslant\left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$.

因此,结论成立.

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时等号成立.

23. 左边 $=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{S-a_i}\right)^k$，记 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$，由 Jensen 不等式得

$$左\geqslant n\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i}}{n}\right]^k=\frac{1}{n^{k-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{S}{S-a_i}-1\right)\right]^k=\frac{1}{n^{k-1}}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(\sqrt{S})^2}{S-a_i}-n\right)^k$$

$$\geqslant\frac{1}{n^{k-1}}\left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{S}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(S-a_i)}-n\right]^k=\frac{n}{(n-1)^k}.$$

24. 由 $x>0$，$nx=x^n$，则 $x=n^{\frac{1}{n-1}}$.

(1)当 $x_1x_2\cdots x_n\geqslant n^{\frac{n}{n-1}}$ 时，因 $x^\alpha(\alpha\geqslant 1)$ 是 $(0,+\infty)$ 的凸函数，于是，由凸函数性质有

$$\frac{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n}{x_1x_2\cdots x_n}\geqslant\frac{n\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n}{x_1x_2\cdots x_n}\geqslant n^{1-n}(x_1x_2\cdots x_n)^{n-1}\geqslant n^{1-n}\left(n^{\frac{n}{n-1}}\right)^{n-1}=n^{\frac{n-1}{n-1}}.$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=n^{\frac{1}{n-1}}$ 时，上式等号成立.

(2) 当 $x_1x_2\cdots x_n\leqslant n^{\frac{n}{n-1}}$ 时，由平均不等式，有

$$\frac{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n}{x_1x_2\cdots x_n}\geqslant\frac{n(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{n}{n}}}{x_1x_2\cdots x_n}=\frac{n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{1-\frac{2}{n}}}\geqslant\frac{n}{\left(n^{\frac{n}{n-1}}\right)^{1-\frac{2}{n}}}=n^{\frac{n-1}{n-1}}.$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=n^{\frac{1}{n-1}}$ 时，上式等号成立.

综合(1)、(2)可知，所证不等式成立.

25. 根据 Hölder 不等式有 $x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\leqslant(x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k)^{\frac{1}{k}}(y_1^{k'}+y_2^{k'}+\cdots+y_n^{k'})^{\frac{1}{k'}}$，

其中　$k>1$，　$\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$.

令　$x_i=a_i^{m+1}$，$y_i=b_i^{-m}(i=1,2,\cdots,n)$

$k=\frac{1}{m+1}>1$(因为 $-1<m<0$)，$k'=-\frac{1}{m}$，(显然有 $\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$)

则 $a_1^{m+1}b_1^{-m}+a_2^{m+1}b_2^{-m}+\cdots+a_n^{m+1}b_n^{-m}\leqslant\left[(a_1^{m+1})^{\frac{1}{m+1}}+(a_2^{m+1})^{\frac{1}{m+1}}+\cdots+(a_n^{m+1})^{\frac{1}{m+1}}\right]^{m+1}$

$\cdot\left[(b_1^{-m})^{-\frac{1}{m}}+(b_2^{-m})^{-\frac{1}{m}}+\cdots+(b_n^{-m})^{-\frac{1}{m}}\right]^{-m}$.

即 $\frac{a_1^{m+1}}{b_1^m}+\frac{a_2^{m+1}}{b_2^m}+\cdots+\frac{a_n^{m+1}}{b_n^m}\leqslant\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{m+1}}{(b_1+b_2+\cdots+b_n)^m}$.

同步检测 8

1. D　**2.** B

3. 由题意可构造一个辅助函数 $f(x)=-(x-2)^2+1(0<x<3)$，由 $f(x)$ 的奇偶性易得当 $-3<x<3$ 时

$$f(x)=\begin{cases}-(x-2)^2+1, & 0<x<3\\ 0, & x=0\\ (x+2)^2-1, & -3<x<0\end{cases}$$

则问题可转化为解不等式 $f(x)\cos x<0$，

即 $\begin{cases}f(x)<0\\ \cos x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)>0\\ \cos x<0\end{cases}$，

易解得 B 正确.

4. C

5. 任取 $x_0\in P$，$x_0>f(x_0)$，有 $x_0>f[f(x_0)]$，所以 $x_0\in Q$，这表明 $P\subseteq Q$；另一方面，任取 $y_0\in Q$，则 $y_0>f[f(y_0)]$. 下面用反证法证明 $y_0>f(y_0)$.

假设 $y_0\leqslant f(y_0)$ 时，由于函数 $y=f(x)$ 是严格递增的，则有 $f(y_0)\leqslant f[f(y_0)]<y_0$，但这与所设 $y_0\leqslant f(y_0)$ 矛盾！

可见只有 $y_0>f(y_0)$，这表明 $y_0\in P$，即又有 $Q\subseteq P$.

由 $P\subseteq Q$，且 $Q\subseteq P$，知 $P=Q$. 选 B.

说明 要判断集合 P 与集合 Q 之间的关系，必须用集合的定义进行证明. 本题求解的关键是由 $y_0>f[f(y_0)]$，猜测出 $y_0>f(y_0)$，然后用反证法、分类讨论等数学思想方法进行求解.

注意到本题是一个选择题，因此也可利用求解选择题的特殊化技巧，排除错误的选择支.

取特殊函数，令 $f(x)=2x$，则 $f[f(x)]=4x$，不等式 $x>f(x)$ 的解集 P 和 $x>f[f(x)]$ 的解集 Q 相等，于是 $P=Q$，排除 A、C、D. 选 B.

6. 因为 $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，令 $x_1=x_2=1$，得 $f(1)=f(-1)=0$，再令 $x_1=x$，$x_2=-1$，得 $f(x)=f(-x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数.

因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数.

$f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)=f\left[x\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\leqslant 0$，$f\left[x\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\leqslant f(1)$ 或 $f\left[x\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\leqslant f(-1)$，

所以 $0<x\left(x-\frac{1}{2}\right)\leqslant 1$ 或 $-1<x\left(x-\frac{1}{2}\right)\leqslant 0$，从而可得不等式的解为

$$\left[\frac{1-\sqrt{17}}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right].$$

7. 设 $H(x)=f(x)\cdot g(x)$，由题设可得 $H(x)$ 为奇函数，又 $H'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$，故当 $x<0$ 时，由 $H'(x)>0$ 知，$H(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增；又因为 $H(x)$ 为奇函数，所以 $H(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也单调递增，且 $H(3)=-H(-3)=0$. 根据以上信息可画出 $H(x)$ 的示意图(略)，由图即可得不等式 $f(x)\cdot g(x)<0$ 的解集是 $(-\infty,-3)\cup(0,3)$.

8. 因为当 $x>0$ 时，有 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

又 $f(x)$ 是偶函数，即有 $f(x)=f(-x)$ 成立，故不等式 $f(\lg x)>f(1)$ 等价于 $f(|\lg x|)>f(1)$.

又因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，故可得 $|\lg x|<1$，解不等式可得解集为 $\left(\frac{1}{10},10\right)$.

说明 把导数知识运用于不等式问题中，使得这类古老题型变得生机勃勃、充满新意. 解这类不等式的关键在于把所给的导数性质，合理转化为函数的性质，然后求解.

9. $a^2-\sin x\geqslant a+1+\cos^2 x$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则有

$$a^2-a\geqslant\left[-\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\right]_{\max}=\frac{9}{4}.$$

解得 $a \leqslant \frac{1-\sqrt{10}}{2}$ 或 $a \geqslant \frac{1+\sqrt{10}}{2}$. 故实数 a 的取值范围是 $\left[-\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{10}}{2}\right]$.

10. $\frac{1}{4}(x+1)^2$.

设 $f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$. 由已知，当 $x=1$ 时，有 $f(1)=1$，即 $a+b+c=1$. ①

又 $f(-1)=0$，即 $a-b+c=0$. ②

由式①、②得 $a+c=b=\frac{1}{2}$.

又 $f(x)\geqslant x$，即 $ax^2+(b-1)x+c\geqslant 0$ 对一切实数 x 恒成立，必须

$$\begin{cases} a>0, \\ (b-1)^2-4ac\leqslant 0. \end{cases}$$

将 $b=\frac{1}{2}$ 代入，得 $ac\geqslant\frac{1}{16}$. ③

又 $c=\frac{1}{2}-a$，有 $a\left(\frac{1}{2}-a\right)\geqslant\frac{1}{16}$，即 $\left(a-\frac{1}{4}\right)^2\leqslant 0$，解得 $a=\frac{1}{4}$.

此时，$f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(x+1)^2$.

同理，由 $f(x)\leqslant\frac{1}{2}(x^2+1)$，解得 $a=\frac{1}{4}$.

综上，函数 $f(x)$ 的解析式为 $\frac{1}{4}(x+1)^2$.

11. 若存在满足条件的函数 f，则对任意 $y>0$，存在 x，使得 $0<x<y$，故 $f(y)>(y-x)f^2(x)>0$，即 f 为正实数集到正实数集的函数.

我们令 $z_0=1+\frac{4}{f^2(1)}$，对任意 $y\geqslant z_0$，取 $x=1$，就有

$$f(y)>(y-1)f^2(1)\geqslant(z_0-1)f^2(1)=4. \quad (1)$$

下面令 $z_n=z_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}$，我们证明：对任意 $y\geqslant z_n$，均有 $f(y)\geqslant 2^{n+2}$.

事实上，当 $n=0$ 时，由(1)可知命题成立. 现设命题对 $n=k$ 时成立，考虑 $n=k+1$ 的情形，对任意 $y\geqslant z_{k+1}$，取 $x=z_k$，就有

$$f(y)>(y-z_k)f^2(z_k)\geqslant(z_{k+1}-z_k)f^2(z_k)=\frac{1}{2^{k+1}}f^2(z_k)\geqslant\frac{1}{2^{k+1}}\times 2^{2k+4}=2^{k+3}.$$

所以，命题对 $k+1$ 成立. 从而对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，只要 $y\geqslant z_n$，就有 $f(y)\geqslant 2^{n+2}$.

注意到，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 $z_0+1>z_n$，故 $f(z_0+1)>2^{n+2}$ 对任意正整数 n 成立，这是一个矛盾.

所以，不存在符合要求的函数 f.

12. (1) 我们先证明如下结论.

设 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $f(x)\leqslant\frac{1}{n}$.

事实上，当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$ 时，有

$$1=f(1)=f(1-nx+nx)\geqslant f(1-nx)+f(nx)\geqslant f(nx).$$

又 $f(nx)=f(\underbrace{x+x+\cdots+x}_{n})\geqslant\underbrace{f(x)+f(x)+\cdots+f(x)}_{n}=nf(x)$，

所以 $nf(x)\leqslant 1$，即 $f(x)\leqslant\dfrac{1}{n}$.

(2) 再证明：当 $0<x\leqslant 1$ 时，有 $f(x)\leqslant 2x$. 由 $0<x\leqslant 1$，知存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $\dfrac{1}{n+1}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{n}$，

由(1)的结论，知 $f(x)\leqslant\dfrac{1}{n}\leqslant\dfrac{2}{n+1}<2x$，即 $f(x)<2x$.

(3) 下面证明 $f(0)\leqslant 0$.

因为对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $0\leqslant\dfrac{1}{n}$，由(1)的结论，知对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $f(0)\leqslant\dfrac{1}{n}$，

两边取极限，得 $f(0)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，即 $f(0)\leqslant 0$.

综上，对任意的 $x\in A$，有 $f(x)\leqslant 2x$.

13. (1) 假设存在正整数 t，使 $f(t)>f(t-1)$，那么 $f(t+2)\leqslant 2f(t+1)-f(t)\leqslant f(t+1)$，

同理可得 $f(t)>f(t-1)>\cdots>f(t-n)>\cdots$

因为对于任意的 $x\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(x)\in\mathbf{N}^*$，所以

$$f(t)\geqslant f(t+1)+1\geqslant f(t+2)+2\geqslant\cdots\geqslant f(t+n)+n\geqslant\cdots$$

设 $f(t)=k$，则 $k=f(t)\geqslant f(t+k)+k$，得 $f(t+k)\leqslant 0$，这与 $f(x)\in\mathbf{N}^*$ 矛盾. 所以假设不成立，即对于任意 $x\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(x)\leqslant f(x+1)$.

(2) 如果对于任意的 $x\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(x)\neq f(x+1)$. 那么由(1)可知

$$f(1)<f(2)<\cdots<f(n)<\cdots$$

$$f(1)\leqslant f(2)-1\leqslant\cdots\leqslant f(n)-n+1\leqslant\cdots$$

又 $f(1)\in\mathbf{N}^*$，所以 $f(2000)\geqslant f(1)+1999\geqslant 2000$，这与已知的 $f(x)<2000$ 矛盾. 因此总存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使 $f(m)=f(m+1)$.

由已知 $f(m+2)\leqslant 2f(m+1)-f(m)=f(m+1)$，而(1)中已证明 $f(m+2)\geqslant f(m+1)$，从而

$$f(m+1)=f(m+2)=f(m+3)=f(m+4)=f(m+5)=\cdots$$

故对于 $x\geqslant m$ 时，$f(x)=f(m)$ 是常数.

说明 要证明当 $x\geqslant m$ 时，$f(x)$是常数. 这里进行反面思考：从否定 $f(x)$不是常数入手，否定假设存在正整数 t，使 $f(t)>f(t+1)$，从而有 $f(t)<f(t+1)$，进而导出与已知矛盾的结论，使问题顺利得解.

14. 首先 $f(0)=0$，令 $g(x)=f(x)/x\ (x\neq 0)$ $g(0)=0$，由于 $|f(x)|\leqslant 1$，因此 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$. 易得 $g(x+y)=g(x)+g(y)$. 如果存在某点 $z\neq 0$ 使得 $g(z)=t\neq 0$，那么 $g(kz)=kt$(k 是整数)，$\lim\limits_{k\to\infty}g(kz)=kt\to\infty$，矛盾.

所以 $g(x)\equiv 0$，因此 $f(x)\equiv 0$.

15. 令 $x=y=-z$，得到 $f(2x)+f(0)+f(0)\geqslant 3f(0)$，从而 $f(2x)\geqslant f(0)$. 另一方面，令 $x=z=-y$，得到

$f(0)+f(0)+f(2x)\geqslant 3f(2x)$，从而知 $f(2x)\leqslant f(0)$.

于是，$f(0)\geqslant f(2x)\geqslant f(0)$，即 $f(2x)\equiv$ 常数 $=c$.

容易验证，对任何 $c\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)\equiv c$ 满足条件.

16. 设命题 $p(n)$：若 $m\geqslant n$，则 $f(m)\geqslant n$. 显然对 $\forall m\geqslant 1$ 有 $f(m)\geqslant 1$. 假设 $p(n)$ 为真，即若 $m\geqslant n$，则 $f(m)\geqslant n$ 成立；若 $m\geqslant n+1$，则 $m-1\geqslant n$，于是 $f(m-1)\geqslant n$，从而 $f[f(m-1)]\geqslant n$，又由已知得 $f(m)>f[f(m-1)]\geqslant n$，故 $f(m)\geqslant n+1$. 因此 $p(n+1)$ 也为真.

根据推断，对 $n\geqslant 1$，有 $p(n)$ 为真. 特别当 $n\geqslant 1$ 时，$f(n)\geqslant n$. 因此 $f(n+1)>f[f(n)]\geqslant f(n)$，即得 f 严格增. 若存在 k 使 $f(k)\neq k$，则 $f(k)>k$，即 $f(k)\geqslant k+1$，所以 $f(k+1)>f[f(k)]>f[f(k)]\geqslant f(k+1)$，而这是不可能的，故 $f(n)=n$.

17. 利用数学归纳法

(1) 当 $n=1$ 时，左边 $=f(x_1)$，右边 $=f(x_1)$，所以命题成立.

(2) 假设当 $n=k(k\geqslant 1)$ 时，命题成立，即 $(k-1)M^k+\prod_{i=1}^{k}f(x_i)\geqslant M^{k-1}\sum_{i=1}^{k}f(x_i)$，则当 $n=k+1$ 时，因为 $\left[M^k-\prod_{i=1}^{k}f(x_i)\right][M-f(x_{k+1})]\geqslant 0$，

所以 $M^{k+1}+\prod_{i=1}^{k+1}f(x_i)\geqslant M\prod_{i=1}^{k}f(x_i)+M^kf(x_{k+1})$.

由归纳假设得 $M^{k+1}+\prod_{i=1}^{k+1}f(x_i)\geqslant M^k\sum_{i=1}^{k}f(x_i)-(k-1)M^{k+1}+M^kf(x_{k+1})$，

即 $[(k+1)-1]M^{k+1}+\prod_{i=1}^{k+1}f(x_i)\geqslant M^k\sum_{i=1}^{k+1}f(x_i)$，因此当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

由(1)，(2)可知，对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 命题成立.

18. 令 $F(x)=f(x)+x$，则 $F(0)=1$，设 u 是 $f(x)=0$ 的最小根，则 $f(u)=0$，$F(u)=u$. 若 $u<0$，则对于 $w=0$，由(1)及 $F(0)\geqslant w\geqslant F(u)$ 得出：存在 $z\in[u,0]$，使得 $F(z)=w=0$. 由(5)知

$$0=f(z)f(u)=f(zf(u)+uf(z)-zu)=f(u(f(z)+z))=f(uF(z))=f(0)=1,$$

矛盾，所以 $u>0$. 对于任意实数 x，由(5)有

$$0=f(x)f(u)=f(xf(u)+uf(x)-xu)=f(uf(x)+xu),$$

所以 $uf(x)+xu$ 是方程 $f(x)=0$ 的根.

因为 u 是 $f(x)=0$ 的最小根，所以 $uf(x)+xu\geqslant u$.

从而 $f(x)+x\geqslant 1$，即 $f(x)\geqslant 1-x$，所以 $f(-2007)\geqslant 2008$. 又 $f(-2007)\leqslant 2008$，所以 $f(-2007)=2008$.

19. 当 $k=1$ 时，左边 $=$ 右边 $=0$.

当 $k=2$ 时，左边 $=|f(4)-f(2)|=|f(2+2)-f(2)|\leqslant 1=$ 右边.

假设 $k=n$ 时，结论成立，即

$$|f(2^n)-f(2)|+|f(2^n)-f(2^2)|+\cdots+|f(2^n)-f(2^{n-1})|+|f(2^n)-f(2^n)|\leqslant\frac{n(n-1)}{2}$$

成立. 当 $k=n+1$ 时

$$\sum_{i=1}^{n+1}|f(2^{n+1})-f(2^i)|=\sum_{i=1}^{n}|f(2^{n+1})-f(2^n)+f(2^n)-f(2^i)|$$

$$\leqslant n|f(2^{n+1})-f(2^n)|+\sum_{i=1}^{n}|f(2^n)-f(2^i)|$$

$$\leqslant n\,|f(2^k-2^n)-f(2^n)|+\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\leqslant n\times 1+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n+1)[(n+1)-1]}{2},$$

所以，$k=n+1$ 时，结论成立.

因此，对所有整数 k，结论成立.

20. 最小常数 $c=2$.

首先，我们证明：如果 f 满足(1)－(3)，则 $f(x)\leqslant 2x$ 对一切 $x\in[0,1]$ 成立.

由(3)与(1)，$f(x)\leqslant f(x)+f(y)\leqslant f(x+y)$，即 $f(x)$ 在$[0,1]$上是增函数.

对 $x\in[0,1]$，取非负整数 n，使 $\frac{1}{2^{n+1}}<x\leqslant\frac{1}{2^n}$.

而由(3)，$2f(x)\leqslant f(2x)$，所以 $2^nf(x)\leqslant 2^{n-1}f(2x)\leqslant 2^{n-2}f(2^2x)\leqslant\cdots\leqslant f(2^nx)\leqslant f(1)=1<2^{n+1}x$. 所以 $f(x)<2x$.

又显然有 $f(0)+f(1)\leqslant f(0+1)=f(1)$，由(1)，$f(0)=0$. 于是 $f(x)\leqslant 2x$，$x\in[0,1]$.

另一方面，令 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 1, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$

这函数显然满足(1)和(2).

设 x，y 及 $x+y$ 都在$[0,1]$内，由对称性可以假定 $x\leqslant\frac{1}{2}$，从而

$$f(x)+f(y)=f(y)\leqslant f(x+y),$$

即 $f(x)$满足题述的所有条件.

如果 $0<c<2$，取 $x\in\left(\frac{1}{2},\frac{1}{c}\right)$，则 $f(x)=1>cx$，所以 2 为所求的最小常数.

21. 假设结论不成立，则对所有不同的有理数 a，b 有 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2}$. (1)

这个条件不受函数 f 增加一个常数的影响，因此不失一般性，我们可以假设 $f(-1)\leqslant 0$ 和 $f(1)\leqslant 0$ 成立.

我们可以断言下面的结论是成立的，即对所有 $n\in\mathbf{N}$ 和 $x\in\{-2^{-n},0,2^{-n}\}$，我们有 $f(x)\leqslant -n$. 下面对 n 用归纳法证明.

当 $n=0$ 时，考虑 $x\in\{-1,0,1\}$，有 $f(\pm 1)\leqslant 0$. 因而利用(1)式有

$$f(0)=f\left(\frac{1-1}{2}\right)<\frac{f(1)+f(-1)}{2}\leqslant 0.$$

因而当 $n=0$ 时结论成立.

现在考虑对任一固定的 n 利用(1)式和归纳假设，有

$$f(\pm 2^{-n-1})=f\left(\frac{0\pm 2^{-n}}{2}\right)<\frac{f(0)+f(\pm 2^{-n})}{2}\leqslant\frac{-n-n}{2}=-n.$$

因为 f 只取整数值，我们有 $f(\pm 2^{-n-1})\leqslant -(n+1)$. 再由(1)式有

$$f(0)=f\left(\frac{2^{-n-1}-2^{-n-1}}{2}\right)<\frac{f(2^{-n-1})+f(-2^{-n-1})}{2}\leqslant -(n+1).$$

从而完成对前面断言的归纳证明.

我们已证明对所有非负整数 n 有 $f(0)\leqslant -n$. 而这是不可能的. 因此不存在函数 $f: \mathbf{Q}\to\mathbf{Z}$ 使得对任意不同的有理数 a,b,(1)式成立. 从而完成问题的结论证明.

22. (1) 当 $x=1$ 时,由②得 $f^2(1)f(f(1)-1)=f^3(1)$.

由①得,$f(1)>1$,故 $f(f(1)-1)=f(1)$. 结合 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上严格递减,可知 $f(1)-1=1$,即 $f(1)=2$.

(2) 设 $f(x)=\frac{a}{x^2}$,由②得 $\frac{a^2}{x^4}\cdot f\left(\frac{a}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)=2^3$,即 $\frac{a^2}{x^4}\,\frac{a}{\left(\frac{a}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)}=8$.

化简得 $a^3-8a^2+16a-8=0$ 解得 $a=2, 3\pm\sqrt{5}$.

因为 $f(1)=2$,所以 $a=2$,因此 $f(x)=\frac{2}{x^2}$.

当 $0<x_1<x_2$ 时 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{2(x_1+x_2)(x_2-x_1)}{x_1^2x_2^2}>0$.

即 $f(x_1)>f(x_2)$,$f(x)$ 严格递减. 又 $f(x)=\frac{2}{x^2}>\frac{1}{x^2}$,所以 $f(x)$满足条件①. 另一方面

$$f^2(x)f\left(f(x)-\frac{1}{x^2}\right)=\left(\frac{2}{x^2}\right)^2\cdot f\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{4}{x^4}\cdot f\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{4}{x^4}\cdot\frac{2}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}=8=f^3(1).$$

故 $f(x)$ 满足条件②,所以函数 $f(x)=\frac{2}{x^2}$ 满足题设的两个条件.

23. $f(n)=bn$,b 为任意给定的实数.

首先证明:当 $n\geqslant 2a+3$ 时,有 $f(n+1)-f(n)=f(n)-f(n-1)$.

只要证明存在正整数 u,使得 $f(n+1)-f(n)=f(u+1)-f(u)$, ①

$f(n)-f(n-1)=f(u+1)-f(u)$. ②

式①等价于 $f(n+1)+f(u)=f(n)+f(u+1)$.

由题设条件知,只要有 $a(n+1)\leqslant u<(a+1)(n+1)$,

$an\leqslant u+1<(a+1)n$ 即可.

也就是 $a(n+1)\leqslant u<u+1<(a+1)n$. ③

同理,式②等价于 $an\leqslant u<u+1<(a+1)(n-1)$ ④

由式③、④知,只要存在正整数 u,使得

$a(n+1)\leqslant u<u+1<(a+1)(n-1)$.

由 $(a+1)(n-1)-a(n+1)=n-2a-1\geqslant 2$,知上式成立.

其次,设 n_0 为整数,$n_0-1<2a+3\leqslant n_0$,则 $n_0\geqslant 3$. 由上述知

$$f(n+1)-f(n)=f(n_0)-f(n_0-1), n\geqslant n_0-1.$$

因此

$$f(n)=(n-n_0+1)[f(n_0)-f(n_0-1)]+f(n_0-1), n\geqslant n_0-1. \quad ⑤$$

取正整数 k、m,使得 $m\geqslant n_0$,$am\geqslant n_0$,$am\leqslant k<(a+1)m$.

又由 $f(k+m)=f(k)+f(m)$,知

$(k+m-n_0+1)[f(n_0)-f(n_0-1)]+f(n_0-1)=(k-n_0+1)[f(n_0)-f(n_0-1)]+f(n_0-1)+(m-n_0+1)[f(n_0)-f(n_0-1)]+f(n_0-1)$.

由此得 $(n_0-1)f(n_0)=n_0f(n_0-1)$. 令 $f(n_0-1)=b(n_0-1)$，则 $f(n_0)=bn_0$.

代入式⑤，知 $f(n)=bn, n\geqslant n_0-1$.

下面证明：对所有正整数 n，有 $f(n)=bn$.

若不然，设使得 $f(n)\neq bn$ 的最大正整数为 n_1. 当 $a>1$ 时，取正整数 k，使得 $an_1\leqslant k<(a+1)n_1$，则 $k>n_1, k+n_1>n_1, f(k+n_1)=f(k)+f(n_1)$.

因此，$f(n_1)=f(k+n_1)-f(k)=(k+n_1)b-kb=n_1b$，矛盾.

当 $a\leqslant 1$ 时，有 $an_1\leqslant n_1<(a+1)n_1$. 因此，$b\cdot 2n_1=f(2n_1)=f(n_1)+f(n_1)$.

从而，$f(n_1)=n_1b$，矛盾.

又当 $f(n)=bn$，b 为任意给定的实数时显然满足题意.

综上所述，所求的函数为 $f(n)=bn$，b 为任意给定的实数.

同步检测 9

1. C **2.** D

3. C 设购买软件 x 片，$x\geqslant 3$ 且 $x\in \mathbf{N}^*$，磁盘 y 盒，$y\geqslant 2$ 且 $y\in \mathbf{N}^*$，则 $60x+70y\leqslant 500$，即 $6x+7y\leqslant 50$.

① 当 $x=3$ 时，$y=2,3,4$，有3种选购方式. ② 当 $x=4$ 时，$y=2,3$，有2种选购方式. ③ 当 $x=5$ 时，$y=2$，有1种选购方式. ④ 当 $x=6$ 时，$y=2$，有1种选购方式. 综上，共有7种选购方式. 故选 C.

说明 此题考查不等式的应用、建模能力、分类讨论思想及应用意识.

4. C 根据新运算⊗的定义，$(x-a)\otimes(x+a)=(x-a)(1-x-a)$，所以 $(x-a)\otimes(x+a)<1$ 对任意实数 x 成立，等价于 $(x-a)(1-x-a)<1$ 对任意实数 x 成立，即 $x^2-x-a^2+a+1>0$ 对任意实数 x 成立，所以问题就转化为一个一元二次不等式恒成立问题，由其充要条件可得 $1-4(-a^2+a+1)<0$，从而解得 $-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$，所以选 C.

5. B

6. 由 $\begin{cases}x+y=s\\ y+2x=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4-s\\ y=2s-4\end{cases}$，交点为 $A(0,2)$，$B(4-s,2s-4)$，$C(0,s)$，$C'(0,4)$.

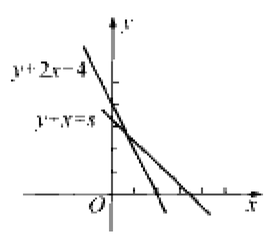


图 9－4

(1) 当 $3\leqslant s<4$ 时可行域是四边形 $OABC$，此时，$7\leqslant z\leqslant 8$.

(2) 当 $4\leqslant s\leqslant 5$ 时可行域是 $\triangle OAC'$ 此时，$z_{max}=8$，故选 D.

7. $f(x)=\sqrt{(x+1)^2+1}-\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$，可看作动点 $P(x,0)$ 到两个定点 $A(-1,1)$，$B\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的距离之差，即

$$f(x)=|PA|-|PB|,\ |f(x)|\leqslant|AB|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2}=\sqrt{8-\sqrt{3}}.$$

故函数 $f(x)$ 的最大值与最小值之差是 $2\sqrt{8-\sqrt{3}}$.

8. 若 $x \leqslant \frac{y}{x^2+y^2}$，则 $t=x$，$t^2=x^2 \leqslant x \cdot \frac{y}{x^2+y^2} \leqslant \frac{xy}{2xy}=\frac{1}{2}$，当 $x \geqslant \frac{y}{x^2+y^2}$，则 $t^2=\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 \leqslant \frac{xy}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}$，故 $t \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$，当且仅当 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号.

所以 t 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. **解** 因为 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$，所以 $x, y \in [0, 1]$，

$$1=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y+2\sqrt{xy} \leqslant 2(x+y),$$

又 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy \leqslant 2(x^2+y^2)$，

所以 $x^2+y^2 \geqslant \frac{1}{2}(x+y)^2 \geqslant \frac{1}{8}$，$\sqrt{x^2+y^2} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{4}$.

等号当且仅当 $x=y=\frac{1}{4}$ 时取到，故到原点距离的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

10. 为求 e 的最大值和最小值，将条件中的 e 分离，即将已知等式变为：
$a+b+c+d=8-e$，$a^2+b^2+c^2+d^2=16-e^2$，构造二次函数
$f(x)=4x^2-2(a+b+c+d)x+a^2+b^2+c^2+d^2=(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2+(x-d)^2$，
则 $f(x) \geqslant 0$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立.
又因为函数 $f(x)$ 的二次项系数大于 0，
所以 $\Delta=4(8-e)^2-16(16-e^2) \leqslant 0$，即 $5e^2-16e \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant e \leqslant \frac{16}{5}$.

故所求 e 的最大值、最小值分别为 $\frac{16}{5}$ 和 0，它们的和为 $\frac{16}{5}$.

11. 由 $xyz(x+y+z)=x^2yz+xyz(y+z)=1$

得
$$x^2+x(y+z)=\frac{1}{yz},$$

所以 $(x+y)(y+z)(z+x)=(x^2+xz+yz+xy)(y+z)$

$$=[x^2+x(y+z)+yz](y+z)=\left(\frac{1}{yz}+yz\right)(y+z)$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+y^2z+yz^2=\frac{1}{3y}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{3z}+\frac{1}{3z}+\frac{1}{3z}+y^2z+yz^2$$

$$\geqslant 8\sqrt[8]{\left(\frac{1}{3y}\right)^3\left(\frac{1}{3z}\right)^3(y^2z)(yz^2)}=8\sqrt[8]{\left(\frac{1}{3}\right)^6}=\frac{8}{3}\sqrt[4]{3}.$$

当且仅当 $y^2z=z^2y=\frac{1}{3y}=\frac{1}{3z}$ 时"="成立.

所以 $y=z=\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$，由已知可得：$x=y=z=\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$.

12. (1) $a_n=\begin{cases}10, & n=1,\\ 10-2n, & n \geqslant 2.\end{cases}$

(2) 当 $n=1$ 时，$b_1=\frac{1}{12-a_1}=\frac{1}{2}$，$T_1=b_1=\frac{1}{2}$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3n+1}{4n+4}$；

因为 $T_1=\frac{3+1}{4+4}=\frac{1}{2}$，所以 T_1 亦满足上式，故 $T_n=\frac{3n+1}{4n+4}$。所以 T_n 随 n 的增大而单调递增，所以要使不等式 $T_n<\frac{m}{32}$ 对一切正整数 n 总成立，需且只需 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n<\frac{m}{32}$。又 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\frac{3}{4}=\frac{24}{32}$，所以最小的正整数 $m=24$。

注意 a_n 是分段形式，所以 b_n 亦是分段的，故在求 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$ 时，仍需对 n 分 $n=1$；$n\geqslant 2$ 两种情况讨论。

13. 根据条件不等式及待求分式结构，构造随机变量 ξ 的分布列如下：

ξ	$\frac{x}{1+x}$	$\frac{y}{1+y}$	$\frac{z}{1+z}$
P	$\frac{1+x}{3(x+y+z)}$	$\frac{1+y}{3(x+y+z)}$	$\frac{1+z}{3(x+y+z)}$

由 $E\xi=\left(\frac{x}{1+x}\right)\left[\frac{1+x}{3(x+y+z)}\right]+\left(\frac{y}{1+y}\right)\left[\frac{1+y}{3(x+y+z)}\right]+\left(\frac{z}{1+z}\right)\left[\frac{1+z}{3(x+y+z)}\right]=\frac{1}{3}$，

由 $E\xi^2=\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\left[\frac{1+x}{3(x+y+z)}\right]+\left(\frac{y}{1+y}\right)^2\left[\frac{1+y}{3(x+y+z)}\right]+\left(\frac{z}{1+z}\right)^2\left[\frac{1+z}{3(x+y+z)}\right]$

$=\frac{1}{3(x+y+z)}\left(\frac{x^2}{1+x}+\frac{y^2}{1+y}+\frac{z^2}{1+z}\right)$。

又由方差公式

$$D\xi=\left(\frac{x}{1+x}-E\xi\right)^2\cdot\left[\frac{1+x}{3(x+y+z)}\right]+\left(\frac{y}{1+y}-E\xi\right)^2\cdot\left[\frac{1+y}{3(x+y+z)}\right]$$
$$+\left(\frac{z}{1+z}-E\xi\right)^2\cdot\left[\frac{1+z}{3(x+y+z)}\right]\geqslant 0,$$

可得 $D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2\geqslant 0$，此即 $E\xi^2\geqslant(E\xi)^2$。当且仅当 $\frac{x}{1+x}=\frac{y}{1+y}=\frac{z}{1+z}$ 时，等号成立。所以 $\frac{1}{3(x+y+z)}\left(\frac{x^2}{1+x}+\frac{y^2}{1+y}+\frac{z^2}{1+z}\right)\geqslant\frac{1}{9}$。

即 $f(x,y,z)=\frac{x^2}{1+x}+\frac{y^2}{1+y}+\frac{z^2}{1+z}\geqslant\frac{(x+y+z)}{3}$，所以，当且仅当 $x=y=z=\frac{1}{2}$ 时，$f(x,y,z)$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$。

14. 解 (1) 设 $y=\frac{2x^2+bx+c}{x^2+1}$，则 $(y-2)x^2-bx+y-c=0$。 ①

因为 $x\in\mathbf{R}$，所以①的判别式 $\Delta\geqslant 0$，即 $b^2-4(y-2)(y-c)\geqslant 0$，

即 $$4y^2-4(2+c)y+8c-b^2\leqslant 0.\qquad ②$$

由条件知，不等式②的解集是$[1,3]$，

所以 1，3 是方程 $4y^2-4(2+c)y+8c-b^2=0$ 的两根.

$$\begin{cases}1+3=2+c\\1\times 3=\dfrac{8c-b^2}{4}\end{cases}.$$

所以 $c=2$，$b=-2$，$b=2$（舍）.

(2) 任取 $x_1, x_2\in[-1,1]$，且 $x_2>x_1$，则 $x_2-x_1>0$，且 $(x_2-x_1)(1-x_1x_2)>0$，

所以 $f(x_2)-f(x_1)=-\dfrac{2x_2}{1+x_2^2}-\left(-\dfrac{2x_1}{1+x_1^2}\right)=\dfrac{2(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}>0$，

所以 $f(x_2)>f(x_1)$，$\lg f(x_2)>\lg f(x_1)$，即 $F(x_2)>F(x_1)$.

所以 $F(x)$ 为增函数.

(3) 记 $u=\left|t-\dfrac{1}{6}\right|-\left|t+\dfrac{1}{6}\right|$，$|u|\leqslant\left|\left(t-\dfrac{1}{6}\right)-\left(t+\dfrac{1}{6}\right)\right|=\dfrac{1}{3}$，

即 $-\dfrac{1}{3}\leqslant u\leqslant\dfrac{1}{3}$，根据 $F(x)$ 的单调性知 $F\left(-\dfrac{1}{3}\right)\leqslant F(u)\leqslant F\left(\dfrac{1}{3}\right)$，

所以 $\lg\dfrac{7}{5}\leqslant F\left(\left|t-\dfrac{1}{6}\right|-\left|t+\dfrac{1}{6}\right|\right)\leqslant\lg\dfrac{13}{5}$ 对任意实数 t 成立.

15. 对于 $k=1,2,\cdots,2006$，

$$\begin{aligned}|y_k-y_{k+1}|&=\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}}{k+1}\right|\\&=\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k-kx_{k+1}}{k(k+1)}\right|\\&=\frac{|(x_1-x_2)+2(x_2-x_3)+\cdots+k(x_k-x_{k+1})|}{k(k+1)}\\&\leqslant\frac{|x_1-x_2|+2|x_2-x_3|+\cdots+k|x_k-x_{k+1}|}{k(k+1)}.\end{aligned}$$

由恒等式

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n},$$

及 $$\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{k}{n}\right),$$

可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2006}|y_k-y_{k+1}|&\leqslant|x_1-x_2|\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{2006\cdot 2007}\right)+2|x_2-x_3|\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\right.\\&\qquad\left.\cdots+\frac{1}{2006\cdot 2007}\right)+\cdots+2006|x_{2006}-x_{2007}|\cdot\frac{1}{2006\cdot 2007}\\&=|x_1-x_2|\left(1-\frac{1}{2007}\right)+|x_2-x_3|\left(1-\frac{2}{2007}\right)+\cdots+|x_{2006}-x_{2007}|\left(1-\frac{2006}{2007}\right)\\&\leqslant\sum_{k=1}^{2006}|x_k-x_{k+1}|\cdot\left(1-\frac{1}{2007}\right)=2006.\end{aligned}$$

等号当且仅当 $|x_1-x_2|=2001$，$x_2=x_3=\cdots=x_{2007}$ 时成立。

特别取 $x_1=2001$，$x_2=x_3=\cdots=x_{2007}=0$ 就能使等号成立。

所以 $\sum\limits_{k=1}^{2006}|y_k-y_{k+1}|$ 的最大值为 2006.

16. 解 （Ⅰ）令 $x=0$，则由 $y=3\times2^{x-1}$ 得 $y=\frac{3}{2}$，所以 $P_1\left(0,\frac{3}{2}\right)$，即 $a_1=0$，$b_1=\frac{3}{2}$.

因为 $\{a_n\}$ 为公差为 2 的等差数列，所以 $a_n=2n-2$，$b_n=3\times2^{2n-3}$.

（Ⅱ） $A_n+B_n=a_2a_3\cdots a_n+(b_2+b_3+\cdots+b_n)$

$$=2\times4\times\cdots\times(2n-2)+(3\times2+3\times2^3+\cdots+3\times2^{2n-3})$$

$$=2^{n-1}[1\times2\times\cdots\times(n-1)]+3\times(2+2^3+\cdots+2^{2n-3})$$

$$=2^n[3\times4\times\cdots\times(n-1)+2^{n-1}]-2$$

当 $n=5$ 时，$A_5+B_5=894<895$，

当 $n=6$ 时，$A_6+B_6=5886>895$，

$n\geqslant2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，A_n+B_n 单调递增，所以 $M=\{2,3,4,5\}$.

（Ⅲ）由于 $u^{2t}+2u^t\leqslant8|A_n+B_n-895|$ 对于 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，当 $n=5$ 时，$|A_n+B_n-895|$ 取得最小值 1，所以 $(u^t)^2+2u^t\leqslant8$，所以 $(u^t+1)^2\leqslant9$，即 $u^t\leqslant2$.

显然 $u>1$，要使 $u^t\leqslant2$ 成立，只须 $t\leqslant\log_u2$，关键是求出 $\log_u2$ 的最小值. 而 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都是单调递增的正项数列，对 i，$j\in M$，$|a_i-a_j|\leqslant a_5-a_2=6$，$|b_i-b_j|\leqslant b_5-b_2=6\times63$，

$$u=|\overrightarrow{P_iP_j}|=\sqrt{(a_i-a_j)^2+(b_i-b_j)^2}\leqslant\sqrt{6^2+(6\times63)^2}=6\sqrt{3970}.$$

所以 t 的取值范围为 $t\leqslant\log_{6\sqrt{3970}}2$.

17. 易知，对一切 $0\leqslant x\leqslant\pi$，有 $\sin x\geqslant0$，$\sin(1-y)x\geqslant0$.

于是，当 $\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant1$ 时，$f(x,y)\geqslant0$，当 $x=0$ 时，等号成立.

当 $0\leqslant y<\frac{1}{2}$，且 $x=0$ 时，$f(x,y)=0$.

下面考虑 $0\leqslant y<\frac{1}{2}$，$0<x\leqslant\pi$ 的情形.

对于任意 $0<x<x+\delta<\frac{\pi}{2}$，有 $\tan x>x>\sin x$，

且 $\sin(x+\delta)=\sin x\cdot\cos\delta+\cos x\cdot\sin\delta\leqslant\sin x+\delta\cos x$.

故 $$\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin(x+\delta)}{x+\delta}=\frac{(x+\delta)\sin x-x\sin(x+\delta)}{x(x+\delta)}$$

$$\geqslant\frac{(x+\delta)\sin x-x(\sin x+\delta\cos x)}{x(x+\delta)}=\frac{\delta\sin x-\delta x\cos x}{x(x+\delta)}=\frac{\delta\cos x(\tan x-x)}{x(x+\delta)}>0.$$

故函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上递减.

而 $g(x)=\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上递减，因此，$f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上也递减.

又 $0<(1-y)x\leqslant x\leqslant\pi$，所以，$\frac{\sin x}{x}\leqslant\frac{\sin(1-y)x}{(1-y)x}$，即 $\sin x\leqslant\frac{\sin(1-y)x}{1-y}$.

注意到 $(1-y)^2=1-2y+y^2\geqslant 1-2y>0$，

则 $\frac{\sin(1-y)x}{1-y}\leqslant\frac{1-y}{1-2y}\sin(1-y)x$，$\sin x\leqslant\frac{1-y}{1-2y}\sin(1-y)x$.

故 $(2y-1)\sin x+(1-y)\sin(1-y)x\geqslant 0$，即 $f(x,y)\geqslant 0$.

当 $y=0$ 时，等号成立.

综上，当 $x=0$ 或 $y=0$ 时，$f(x,y)_{min}=0$.

说明 ① 本题也可利用求导数方法结合 $\tan x>x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 来判断函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的单调性.

② 先将多元函数转化为一元函数，然后利用函数的单调性来确定最值.

18. (1) $g(x)=\begin{cases}0(x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 1),\\ -x^2-x+2(-2<x<1).\end{cases}$

(2) 由题设条件，$a>0$ 时，直线 $y=ax+b$ 与曲线 $y=g(x)$ 交于三个不同的点，只须直线与曲线在 $-2<x<1$ 的范围内有两个不同的交点.

由 $\begin{cases}y=ax+b\\ y=-x^2-x+2\end{cases}$ 得 $x^2+(a+1)x+b-2=0(-2<x<1)$.

于是，只须二次函数 $\varphi(x)=x^2+(a+1)x+b-2$ 的图象在 $-2<x<1$ 的范围内与 x 轴有两个不同的交点. 此时 a、b 应同时满足以下条件：

$$\begin{cases}\Delta=(a+1)^2-4(b-2)>0,\\ -2<-\frac{a+1}{2}<1,\\ \varphi(-2)>0,\\ \varphi(1)>0,\\ a>0,\end{cases}\quad \text{即}\begin{cases}b<\frac{1}{4}(a+1)^2+2,\\ 0<a<3,\\ b>2a.\end{cases}$$

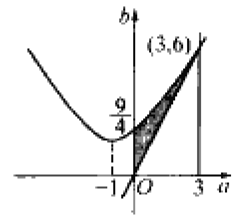


图 9-5

故点(a,b)所在的区域为图 9-5 中的阴影部分(不含边界).

19. 设 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta(r\geqslant 0,0\leqslant\theta<2\pi)$ 得 $-\sqrt{5}\leqslant x\leqslant\sqrt{5}$，$-\sqrt{5}\leqslant y\leqslant\sqrt{5}$，$0\leqslant r\leqslant\sqrt{5}$.

于是 $4y+9\geqslant-4\sqrt{5}+9>0$，$7y-3x-18=7r\sin\theta-3r\cos\theta-18=r\cdot\sqrt{58}\sin(\theta-\varphi)-18\leqslant\sqrt{290}-18<0$.

所以 $f(x,y)=3|x+y|+4y+9-7y+3x+18$

$$=3\sqrt{2}r\left|\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|+3\sqrt{2}r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+27.$$

(i) 当 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0$，即 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{3}{4}\pi$，或 $\frac{7}{4}\pi\leqslant\theta<2\pi$ 时，$f(x,y)=3\sqrt{2}r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+3\sqrt{2}r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+27=6r\cos\theta+27$.

所以当 $\cos\theta=1$ 时，$f(x,y)_{max}=6\sqrt{5}+27$，当 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f(x,y)_{min}=27-3\sqrt{10}$.

(ii) 当 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 0$，即 $\frac{3}{4}\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{7\pi}{4}$ 时，

$$f(x,y)=-3\sqrt{2}r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+3\sqrt{2}r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+27=-6r\sin\theta+27,$$

所以当 $\sin\theta=-1$ 时，$f(x,y)_{\max}=27+6\sqrt{5}$，

当 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f(x,y)_{\min}=27-3\sqrt{10}$，

综上 $f(x,y)_{\max}=27-6\sqrt{5}$，$f(x,y)_{\min}=27-3\sqrt{10}$.

20. 记 $y_i=x_i^{\alpha-\beta}(1-x_i^{\alpha})$.

由加权的算术－几何平均不等式有 $y_i^{\alpha}=\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\right)^{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}x_i^{\alpha}\right)^{\alpha-\beta}(1-x_i^{\alpha})^{\alpha}$

$$\leqslant\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\right)^{\alpha-\beta}\left[\frac{(\alpha-\beta)\cdot\frac{\alpha}{\alpha-\beta}x_i^{\alpha}+\alpha(1-x_i^{\alpha})}{(\alpha-\beta)+\alpha}\right]^{2\alpha-\beta}=\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\right)^{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{2\alpha-\beta}\right)^{2\alpha-\beta}.$$

则 $$y_i\leqslant\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}\left(\frac{\alpha}{2\alpha-\beta}\right)^{\frac{2\alpha-\beta}{\alpha}}=\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}=(n-1)n^{-\frac{n}{n-1}},$$

故 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\beta}}{1-x_i^{\alpha}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\alpha}}{x_i^{\alpha-\beta}(1-x_i^{\alpha})}\geqslant(n-1)^{-1}\cdot n^{\frac{n}{n-1}}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}=\frac{n}{n-1}\cdot\sqrt[n-1]{n}.$$

上式等号成立的条件是 $\frac{\alpha}{\alpha-\beta}x_i^{\alpha}=1-x_i^{\alpha}$，即 $x_i^{\alpha}=\frac{\alpha-\beta}{2\alpha-\beta}=\frac{1}{n}$，亦即 $x_i=\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

从而，$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\beta}}{1-x_i^{\alpha}}$ 的最小值为 $\frac{n}{n-1}\cdot\sqrt[n-1]{n}$.

21. 用调整法探索题中和式的最大值.

首先对于 $x,y>0$，我们来比较 $(x+y)^4-(x+y)^5+0^4-0^5$ 与 $x^4-x^5+y^4-y^5$ 的大小.

$$\begin{aligned}&(x+y)^4-(x+y)^5+0^4-0^5-(x^4-x^5+y^4-y^5)\\&=xy(4x^2+6xy+4y^2)-xy(5x^3+10x^2y+10xy^2+5y^3)\\&\geqslant\frac{7}{2}xy(x^2+2xy+y^2)-5xy(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)\\&=\frac{1}{2}xy(x+y)^2[7-10(x+y)].\end{aligned}$$

只要 $x,y>0$，$x+y<\frac{7}{10}$，上式就必然大于 0.

如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的非零数少于两个，那么，题中的和式就等于 0. 以下考察 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的非零数不少于两个的情形.

如果某三个数 $x_i,x_j,x_k>0$，那么，其中必有两个之和 $\leqslant\frac{2}{3}<\frac{7}{10}$. 根据(1)中的讨论，可将这两数合并作为一个数，另补一个数 0，使得题中的和式变大. 经有限次调整，最后剩下两个非零数，不妨设为 $x,y>0$，$x+y=1$.

对此情形，$x^4-x^5+y^4-y^5=x^4(1-x)+y^4(1-y)=xy(x^3+y^3)=xy[(x+y)^3-3xy(x+y)]=xy(1-3xy)=\frac{1}{3}(3xy)(1-3xy)$.

当 $3xy=\frac{1}{2}$ 时，上式达到最大值，$x^4-x^5+y^4-y^5=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{12}$.

这就是题目所求的最大值，能达到这最大值的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，其中仅两个不等于 0，以 x 和 y 表示这两个数，则 $x, y > 0, x+y=1, xy=\frac{1}{6}$.

解二次方程 $\lambda^2-\lambda+\frac{1}{6}=0$ 可知 $x=\frac{3+\sqrt{3}}{6}, y=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

当然也可以是 $x=\frac{3-\sqrt{3}}{6}, y=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$.

验算可知，如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中仅这样两个非零数，那么，题目的和式确实达到最大值$\frac{1}{12}$.

22. 先对给定的 k，求 $|x_k|$ 的最大值.

事实上，题设等式即为 $x_1^2+(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2=2$. ①

注意到恒等式 $|x_k|=|x_1-(x_1+x_2)+\cdots+(-1)^{k-1}(x_{k-1}+x_k)|$, ②

$$|x_k|=|x_n-(x_{n-1}+x_n)+\cdots+(-1)^{n-k}(x_k+x_{k+1})|. \quad ③$$

由柯西不等式得 $x_k^2 \leqslant k[x_1^2+(x_1+x_2)^2+\cdots+(x_{k-1}+x_k)^2]$, ④

$$x_k^2 \leqslant (n-k+1)[x_n^2+(x_{n-1}+x_n)^2+\cdots+(x_k+x_{k+1})^2]. \quad ⑤$$

由式④、⑤并结合式①，得$\frac{x_k^2}{k}+\frac{x_k^2}{n-k+1} \leqslant 2$.

解得 $|x_k| \leqslant \sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}\ (k=1, 2, \cdots, n)$. ⑥

由柯西不等式取等号的条件，知式⑥等号成立当且仅当式④、⑤等号同时成立，即

$$x_1=-(x_1+x_2)=x_2+x_3=\cdots=(-1)^{k-1}(x_{k-1}+x_k), \quad ⑦$$

$$x_k+x_{k+1}=-(x_{k+1}+x_{k+2})=\cdots=(-1)^{n-k}x_n. \quad ⑧$$

由式⑦知，对于 $1<i\leqslant k$，有 $x_1=(-1)^{i-1}(x_{i-1}+x_i)$，即 $x_i+x_{i-1}=(-1)^{i-1}x_1$，则 $(-1)^i x_i-(-1)^{i-1}x_{i-1}=-x_1$，故 $(-1)^i x_i=-x_1+(-x_1)(i-1)=-x_1 i$. 所以，$x_i=(-1)^{i-1}ix_1(i=2, 3, \cdots, k)$.

令 $i=k$，得 $x_1=\frac{x_k}{k}(-1)^{k-1}$. 所以，$x_i=x_k(-1)^{i-k}\cdot\frac{i}{k}(i=1, 2, \cdots, k-1)$.

同理，由式⑧可求出 $x_j=x_k(-1)^{j-k}\cdot\frac{n+1-j}{n-k+1}(j=k+1, \cdots, n)$.

以上说明，存在满足题设条件的一组实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使式⑥取到等号.

因此，对于给定的 k，有 $\max|x_k|=\sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}(1\leqslant k\leqslant n)$.

当 k 从 1 变到 n 时，不难证明 $k(n-1-k) \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]\left[\frac{n+2}{2}\right]$.

当且仅当 $k=\left[\frac{n+1}{2}\right]$时，上式等号成立.

故 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\max|x_k|=\sqrt{\frac{2}{n+1}\left[\frac{n+1}{2}\right]\left[\frac{n+2}{2}\right]}$，其中，$[x]$ 为高斯函数.

23. 本题属于存在性问题，宜用反证法.

先看 $k=2$ 的情形，用反证法. 反设任何两个数中，都是最小的数不大于最大的一半，则

$$a_2 \leqslant \frac{a_1}{2},\ a_3 \leqslant \frac{a_2}{2} \leqslant \frac{a_1}{4},\ a_4 \leqslant \frac{a_3}{2} \leqslant \frac{a_1}{2^3},\ \cdots,\ a_n \leqslant \frac{a_1}{2^{n-1}}.$$

于是 $1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \leqslant a_1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{2^2} + \frac{a_1}{2^3} + \cdots = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right)a_1 = 2a_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$，矛盾.

再看 $k=3$ 的情形，用反证法. 反设任何三个数中，都是最小的数不大于最大的一半，则

$a_3 \leqslant \frac{a_1}{2},\ a_5 \leqslant \frac{a_3}{2} \leqslant \frac{a_1}{4},\ a_7 \leqslant \frac{a_5}{2} \leqslant \frac{a_1}{2^3},\ \cdots$

$a_4 \leqslant \frac{a_2}{2},\ a_6 \leqslant \frac{a_4}{2} \leqslant \frac{a_2}{4},\ a_8 \leqslant \frac{a_6}{2} \leqslant \frac{a_2}{2^3},\ \cdots$

于是 $1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) + (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots)$

$\leqslant \left(a_1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{2^2} + \frac{a_1}{2^3} + \cdots\right) + \left(a_2 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_2}{2^3} + \cdots\right)$

$= 2a_1 + 2a_2 \leqslant 4a_1 = \frac{4}{6} < 1$，矛盾.

上述所有式子都是"通式"，其规律可以直接类比到一般情况，实际上，

$1 = (a_1 + a_k + a_{2k-1} + \cdots) + (a_2 + a_{k+1} + a_{2k} + \cdots) + \cdots + (a_{k-1} + a_{2k-2} + a_{3k-3} + \cdots)$

$\leqslant 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_{k-1} \leqslant 2a_1 + 2a_1 + \cdots + 2a_1$

$= 2(k-1)a_1 = \frac{2(k-1)}{2k} = \frac{k-1}{k} < 1$，矛盾.

24. 将任意两道试题看成一个对子，若某个参赛者答对两道试题，就计算这个对子一次，如此我们可得到所有的对子总数. 另一方面，也可考虑每个参赛者对所有这样的对子总数的贡献，恰好答对 2，3，4，5，6 道试题者，分别对对子总数的贡献是 C_2^2，C_3^2，C_4^2，C_5^2，C_6^2.

设有 n 个参赛者，令 p_{ij} 表示答对第 i 道试题和第 j 道试题的参赛者的人数 $(1 \leqslant i < j \leqslant 6)$，由题设，对所有 $1 \leqslant i < j \leqslant 6$，都有 $p_{ij} > \frac{2}{5}n$. 故 $p_{ij} \geqslant \frac{2n+1}{5}$.

于是，$S = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 6} p_{ij} \geqslant C_6^2 \cdot \frac{2n+1}{5} = 6n + 3$. ①

另一方面，若记 $n_r(0 \leqslant r \leqslant 6)$ 为恰好答对 r 道试题的参赛者的人数，则 $\sum\limits_{r=0}^{6} n_r = n$. 考虑到对于一个恰好答对 r 道试题的参赛者，他对 ① 式中的和 S 的贡献为 C_r^2（当 $r < 2$ 时，$C_r^2 = 0$），所以，$S = \sum\limits_{r=0}^{6} C_r^2 n_r$. ②

由式 ①、② 可得，$S = \sum\limits_{r=0}^{6} C_r^2 n_r \geqslant 6n + 3 = 6\sum\limits_{r=0}^{6} n_r - 3$.

由题设，$n_6 = 0$，故上式为 $4n_5 \geqslant 3 + 6n_0 + 6n_1 + 5n_2 + 3n_3$. 所以，$n_5 \geqslant 1$.

若 $n_5 = 1$，则 $n_0 = n_1 = n_2 = n_3 = 0$. 于是，$n_4 = n - 1$. 由式 ② 知，此时，$S = 6n + 4$.

由于 $S = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 6} p_{ij}$ 中的 15 个加数 p_{ij} 都至少是 $\frac{2n+1}{5}$（记为 λ），而 $S = 6n + 4$ 不是 15 的倍数，故这些 p_{ij} 不可能全相等. 于是，其中有 14 个为 λ，1 个为 $\lambda + 1$.

设 (i_0, j_0) 使得 $p_{i_0 j_0} = \lambda + 1$. 答对 5 道题的参赛者称为"优胜者". 不失一般性，不妨设优胜者没有

答对第 6 题，且 i_n、j_n 不为 1，于是，$2 \leqslant i_n < j_n \leqslant 6$。考虑和式

$$S' = p_{16} + p_{26} + p_{36} + p_{46} + p_{56}, S'' = p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{15} + p_{16}.$$

因除优胜者外每个参赛者都恰好答对了 4 题，故若有 x 个参赛者答对了第 6 题，则他们中的每一个对 S' 的贡献是 3；有 y 个参赛者答对了第 1 题(除优胜者外)，他们中的每一个对 S'' 的贡献为 3，而优胜者对 S'' 的贡献为 4，于是，$S' = 3x$，$S'' = 3y + 4$。

而 $p_{i_n j_n}$ 不在 S'' 中出现，所以，$S'' = 5\lambda = 2n - 1$，故 S' 为 5λ 或 $5\lambda + 1$，从而，$3x = 2n + 1$ 或 $3x = 2n + 2$，且 $3y + 4 = 2n + 1$。由 $3y + 4 = 2n + 1$，知 $3 \mid n$。而这与 $3x = 2n + 1$ 或 $3x = 2n + 2$ 矛盾，所以，$n \geqslant 2$。